

Листок №1. Множества

9 класс

Дата выдачи листка: 02-06.09.02.

– Так они и жили, – продолжала Соня сонным голосом, зевая и протирая глаза, – как рыбы в киселе. А еще они рисовали... всякую всячину... все, что начинается на М.

...

– ...начинается на М, – продолжала она. – Они рисовали мышеловки, месяц, математику, множество... Ты когда-нибудь видела, как рисуют множество?

– Множество чего? – спросила Алиса.

– Ничего, – отвечала Соня. – Просто множество!

Л. Кэрролл «Алиса в Стране чудес»

Введем термин «**множество**». Этому понятию мы не будем давать строгого определения. Нестрого множество можно определить как совокупность некоторых объектов, называемых его **элементами**.

Множество может задаваться несколькими способами:

- Перечислением всех его элементов: $A = \{a, b, c\}$ – множество из трех элементов.
- Перечислением некоторых элементов, позволяющих понять, какие еще элементы входят в это множество: $C = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ – множество целых чисел от 1 до 1000.
- Указанием характеристического свойства, определяющего элементы множества (т.е. в это множество входят все объекты, обладающие этим свойством и только они):
 $E = \{\text{целые числа } n \mid n \text{ делится на 2 без остатка}\}$ – множество всех четных чисел.
Справа от символа «|» пишется условие, которому должны удовлетворять элементы множества. Обычно это символ читают «такие, что» («в множество E входят все целые числа n такие, что n делится на 2 без остатка»).

Если объект a **принадлежит** множеству A , т.е. является элементом этого множества, это записывается так: $a \in A$; если не принадлежит – вот так: $a \notin A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом $\emptyset$.

Множество может содержать другое множество в качестве элемента: например, элементами множества $\{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$ являются одно число и два других множества.

Задача 1. Верны ли утверждения:

- $5 \in \{0, 2, 4, \dots, 10\}$;
- $0 \notin \emptyset$;
- $1 \in \{\{0\}, \{1\}\}$;
- $\{0\} \in \{\{0\}, \{1\}\}$?

Определение 1. Множества называются **равными (тождественными)**, если они состоят из одних и тех же элементов; обозначается $A = B$.

Определение 2. Множество A называется **подмножеством** множества B , если любой элемент A принадлежит B ; обозначается $A \subset B$.

Примечание. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Задача 2. Доказать:

- $A \subset B$ и $B \subset C \Rightarrow A \subset C$;
- $A \subset B$ и $B \subset A \Leftrightarrow A = B$.

Задача 3. Какое из приведенных множеств является подмножеством другого?

- $A = \{\text{целые числа } k \mid k^2 \leq 4\}$, $B = \{\text{целые числа } k \mid k^3 \leq 8\}$;
- $A = \{\text{целые числа } k \mid k^2 - 9 \leq 0\}$, $B = \{\text{целые числа } k \mid k \geq -2\}$.

Задача 4. Выписать все подмножества множества $M = \{\text{целые числа } n \mid -0,2 \leq n \leq 3,5\}$.

Задача 5. Сколько подмножеств у множества из m элементов?

Не следует путать понятия «принадлежит» и «является подмножеством».

Задача 6. Верно ли, что:

- a) $\{0, a\} \subset \{\{a, 0\}, \{b, 1\}\}$;
- b) $\{0, a\} \in \{\{a, 0\}, \{b, 1\}\}$;
- c) $\emptyset \subset \{a, b, c\}$;
- d) $\emptyset \in \{a, b, c\}$?

Задача 7. Привести пример таких множеств A и B , что множество B состоит из одного элемента и одновременно $A \in B$ и $A \subset B$.

Определения 3-6. Для множеств определены следующие операции:

- **Объединение:** $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$;
- **Пересечение:** $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$;
- **Разность:** $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$;
- **Симметрическая разность:** $A \Delta B = \{x \mid (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ или } (x \notin A \text{ и } x \in B)\}$.

Задача 8. Доказать: $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.

Задача 9. Множества A и B – круги на плоскости. Нарисовать их, если:

- a) $A \cap B = B$;
- b) $A \cap B = \emptyset$;
- c) $A \cup B = \emptyset$;
- d) $A \cap B = C, C \neq A, C \neq B, C \neq \emptyset$;
- e) $A \setminus B \subset B$;
- f) $A \cap B = A \Delta B$;
- g) $A \cup B = A \Delta B$.

Задача 10. Верно ли:

- a) $A \cup (B \setminus C) = (A \setminus C) \cup B$;
- b) $A \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap B$;
- c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$?

Задача 11. Доказать:

- a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
- b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
- c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \Delta B$.

Задача 12. Пусть $A \subset S, B \subset S$. Доказать:

- a) $S \setminus (A \cup B) = (S \setminus A) \cap (S \setminus B)$;
- b) $S \setminus (A \cap B) = (S \setminus A) \cup (S \setminus B)$;

Утверждения задачи 12 называются формулами де Моргана.

Определение 7. **Упорядоченной парой** элементов x и y называется множество $\{x, \{x, y\}\}$. Такая упорядоченная пара обозначается (x, y) .

Определение 8. **Декартовым произведением** множеств A и B называется множество упорядоченных пар (a, b) , где $a \in A, b \in B$: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Задача 13. Выписать все элементы декартова произведения $\{0, 1, \dots, 4\} \times \{-5, 0, 5\}$.

Задача 14. Множество A состоит из m элементов, B – из n элементов. Сколько элементов в $A \times B$?