

Листок №10 ХР. Последовательности. Конечные пределы

10 класс

Дата выдачи листка: 09.09.03.

«...став одним из едва заметных предметов мира, созданного на основе синтеза математики и ужаса, я приду в кошмары другого грешника и так до бесконечности. Ведь я уверен, что Ад не имеет предела.»

Александр Быстровский «Новая библейская энциклопедия»

Определение 1. *Последовательностью* элементов множества M называется отображение $R : \mathbb{N} \rightarrow M$. Если $M \subset \mathbb{R}$, то последовательность называется **числовой**.

Определение 2. Пара $(n, a_n) \in R$ называется **элементом последовательности** или **членом последовательности**. a_n называется **значением** элемента последовательности, а число n — номером этого элемента.

Последовательность обозначается $\{a_n\}$. Например, $\{a_n\} : a_n = n$ (или просто $\{n\}$) — последовательность, значение каждого элемента которой равно его номеру.

Последовательность может быть задана **рекуррентно**, т. е. почти каждый элемент последовательности определяется через предыдущие. Например, $\{a_n\} : a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 1 (n > 1)$.

Далее все последовательности считаются числовыми, если не указано иное.

Задача 1. Пусть задана последовательность $\{a_n\}, a_n \in M$.

а) Какие из следующих утверждений верны:

$\forall n \in \mathbb{N} \exists! x \in M : x = a_n; \forall x \in M \exists n \in \mathbb{N} : x = a_n; \exists m, n \in \mathbb{N} : (m \neq n) \& (a_m = a_n)$.

б) Может ли последовательность содержать конечное число элементов? Счетное? Несчетное?

Определение 3. Число a называется **пределом** последовательности $\{a_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon |a - a_n| < \varepsilon$. Обозначается $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ или $a_n \rightarrow a$.

Другими словами, для сколь угодно малого ε значения почти всех элементов последовательности лежат в интервале $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$.

Задача 2. Может ли последовательность иметь более одного предела?

Определение 4. Если последовательность имеет предел, она называется **сходящейся**. В противном случае последовательность называется **расходящейся**.

Задача 3. Запишите в кванторах утверждение «последовательность $\{a_n\}$ является расходящейся», не используя знак отрицания.

Задача 4. Какие из следующих последовательностей являются сходящимися? Найдите их пределы.

- | | | |
|---------------------|------------------------|------------------------------|
| а) $a_n = n$; | б) $a_n = 1/n$; | с) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$; |
| д) $a_n = (-1)^n$; | е) $a_n = 1000^n/n!$; | ф) $a_n = n!/n^n$; |
| г) $\sin n/n$. | | |

Задача 5. Докажите:

- | | |
|---|--|
| а) $\sqrt[n]{91} \rightarrow 1$ (Hint: вспомните неравенство Бернулли); | б) $n/2^n \rightarrow 0$ (Hint: $2=1+1$); |
| с) $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ (Hint: вспомните бином Ньютона). | |

Примечание. **Арифметическим корнем n -ой степени** из неотрицательного числа x называется такое неотрицательное число y , что $y^n = x$. Можно доказать существование и единственность арифметического корня. Обозначается $y = \sqrt[n]{x}$.

Задача 6. Докажите: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$. Верно ли обратное?

Задача 7. Докажите: $a_n \rightarrow a \Rightarrow b_n \rightarrow a$, где $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$.

Задача 8. Докажите, что отбрасывание или изменение значений конечного числа элементов последовательности не влияет на ее сходямость и значение предела.

Определение 5. Последовательность $\{\alpha_n\}$ такая, что $\alpha_n \rightarrow 0$, называется **бесконечно малой**.

Определение 6. Последовательность называется **ограниченной**, если множество ее значений ограничено. Аналогично вводятся понятия **ограниченной сверху** и **ограниченной снизу** последовательностей.

Задача 9. Пусть a_n — ограниченная последовательность, а $\{\beta_n\}$ — бесконечно малая. Что можно сказать о $\{a_n \cdot \beta_n\}$?

Задача 10. Докажите: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \{\beta_n\}$ — бесконечно малая, где $\beta_n = a_n - a$.

Задача 11. Пусть даны последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$. Докажите существование пределов и найдите их для последовательностей:

- a) $\{a_n \pm b_n\}$; b) $\{a_n \cdot b_n\}$; c) $\{a_n/b_n\}$, $b \neq 0, \forall n \in \mathbb{N} b_n \neq 0$.

Hint: Некоторые свойства удобнее доказывать сначала для бесконечно малых последовательностей и с помощью задачи 14.

Задача 12. Докажите следующие свойства пределов:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a < b \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 a_n < b$;
b) $\forall n \in \mathbb{N} a_n \leq b, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow a \leq b$;
c) $\forall n \in \mathbb{N} a_n \leq c_n \leq b_n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

Примечание. Последнее утверждение известно как **теорема о двух милиционерах**.

Задача 13. Даны последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, $z_n = x_n + y_n$. Ограничена ли сверху $\{z_n\}$, если:

- a) $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены сверху; b) $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ не ограничены сверху;
c) $\{x_n\}$ ограничена сверху, $\{y_n\}$ не ограничена сверху;

Задача 14. Докажите ограниченность любой сходящейся последовательности. Верно ли, что любая ограниченная последовательность является сходящейся?

Определение 7. **Верхней гранью** последовательности называется верхняя грань множества значений ее элементов. Аналогично вводятся нижняя грань, точные грани ($\sup\{a_n\}, \inf\{a_n\}$).

Задача 15. Найдите точные верхние и нижние грани последовательностей:

- a) $\{1/n\}$; b) $\{(-1)^n/n\}$; c) $\{n^2 - 2n + 5\}$;
d) $\{a_n\} : a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n > 2)$ (числа Фибоначчи).

Определение 8. Последовательность $\{a_n\}$ называется **строго возрастающей**, если $\forall n \in \mathbb{N} a_n < a_{n+1}$. Последовательность $\{a_n\}$ называется **неубывающей**, если $\forall n \in \mathbb{N} a_n \leq a_{n+1}$.

Аналогично вводятся понятия **строго убывающей** и **невозрастающей** последовательностей.

Определение 9. Неубывающая или невозрастающая последовательность называется **монотонной**, строго возрастающая или строго убывающая — **строго монотонной**.

Задача 16. Исследуйте последовательности на монотонность и ограниченность:

- a) $a_n = 1^{-n}$; b) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$; c) $\{a_n\} : a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

Задача 17. (Теорема Вейерштрасса) Докажите, что ограниченная сверху неубывающая последовательность сходится.

Задача 18. Найти предел последовательности $\{a_n\} : a_1 = 2, a_n = 5 - 1/a_{n-1} (n > 1)$.

Задача 19. Докажите, что $\exists e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$, причем $2 < e < 3$:

- a) Докажите монотонность (*Hint: используйте неравенство Бернулли*);
b) Докажите ограниченность (*Hint: используйте бином Ньютона и факт, что почти для всех $n \in \mathbb{N} 1 - \frac{1}{n} < 1$ и $n! \geq 2^n$*);
c) Докажите сходимости и неравенства.