

Листок №11 SP1. Последовательности. Предельные точки

10 класс

Дата выдачи листка: 23.09.03.

«Века плывут, подобно китам,
в своей среде молчаливой.
Их ровный путь уныл, как и мой.
Но мой - имеет предел.»

М. Щербаков

Определение 1. Число a называется **предельной точкой** последовательности, если $\forall \varepsilon > 0$ в интервале $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ лежат значения бесконечного числа элементов этой последовательности.

Определение 2. Пусть есть строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ и произвольная последовательность $\{a_n\}$. Последовательность $\{b_k\} : b_k = a_{n_k}$ называется **подпоследовательностью** последовательности $\{a_n\}$.

Обозначается: $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$.

Определение 3. Число a называется **частичным пределом** последовательности, если оно является пределом какой-либо ее подпоследовательности.

Задача 1. Докажите, что частичный предел и предельная точка — одно и то же.

Задача 2. Запишите в кванторах, не используя знак отрицания, утверждение «число a не является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$ ».

Задача 3. Может ли:

- a) предельная точка последовательности не быть ее пределом;
- b) предел последовательности не быть ее предельной точкой?

Задача 4. Пусть A — множество всех предельных точек последовательности $\{a_n\}$. Может ли быть:

- a) $A = \{0, 1\}$; b) $A = [0, 1]$; c) $A = (0, 1)$;
- d) $A = \mathbb{N}$; e) $A = \mathbb{Q}$; f) $A = \mathbb{R}$.

Задача 5. Докажите, что если множество всех предельных точек последовательности непусто и ограничено, то в нем есть наибольший и наименьший элемент.

Задача 6. Пусть задана последовательность $\{a_n\}$, $a_n \rightarrow a$. Докажите: $\forall \{a_{n_k}\} \subset \{a_n\} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Задача 7. (Теорема Больцано-Вейерштрасса) Докажите, что любая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.

Hint: Воспользуйтесь задачей о системе вложенных отрезков (9 листок).

Примечание. Другая формулировка этой теоремы: из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Задача 8. Докажите, что последовательность является сходящейся тогда и только тогда, когда она ограничена и имеет ровно один частичный предел.

Определение 4. Последовательность $\{a_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon |a_n| > 1/\varepsilon$.

Также говорят, что бесконечно большая последовательность **имеет пределом бесконечность**; обозначается $a_n \rightarrow \infty$.

Определение 5. Если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon a_n > 1/\varepsilon$, говорят, что последовательность **имеет пределом плюс бесконечность**; обозначается $a_n \rightarrow +\infty$.

Аналогично вводится понятие последовательности, **имеющей пределом минус бесконечность**; обозначается $a_n \rightarrow -\infty$.

Обратите внимание, что бесконечно большие последовательности являются расходящимися, хотя и имеют предел. Сходящимися называются последовательности, имеющие конечные пределы.

Задача 9. Приведите пример неограниченной, но не бесконечно большой последовательности.

Задача 10. Может ли выполняться одновременно:

- a) $a_n \rightarrow \infty$ и $a_n \rightarrow +\infty$;
- b) $a_n \rightarrow -\infty$ и $a_n \rightarrow +\infty$;
- c) $|a_n| \rightarrow \infty$ и $\neg(a_n \rightarrow \infty)$;
- d) $a_n \rightarrow \infty$ и $\forall n \in \mathbb{N} \exists k > n : a_k < 1$?

Определение 6. Последовательность $\{a_n\}$ называется **фундаментальной**, если $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \forall p \in \mathbb{N} |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

Задача 11. (Критерий Коши) Последовательность фундаментальна тогда и только тогда, когда она сходится. Докажите:

- a) любая сходящаяся последовательность фундаментальна;
- b) любая фундаментальная последовательность ограничена;
- c) если фундаментальная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность, то предел последовательности существует и равен пределу подпоследовательности;
- d) любая фундаментальная последовательность является сходящейся.

Задача 12. Исследуйте последовательности (ограниченность, монотонность, множество предельных точек, сходимост, предел):

- a) $\{\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\}$;
- b) $\{(-1)^{[\sqrt{n}]} + \frac{(-1)^n}{n}\}$;
- c) $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$;
- d) $\{c \cdot q^n\}$ (числа $c \in \mathbb{R}$ и $q \in \mathbb{R}$ считать заданными);
- e) $\{\sqrt[n]{n}\}$;
- f) $a_n = \sum_{k=0}^{k=n} c \cdot q^k$ ($c \in \mathbb{R}$ и $q \in (0; +\infty)$);
- g) $\{\sin n\}$;
- h) $a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos^k(2\pi x \cdot n!) \ (x \in \mathbb{R})$.

Примечание. $[x]$, где $x \in \mathbb{R}$, — целая часть x , т.е. наибольшее целое число, не превышающее x .