

Листок №12. Функции. Beta версия

10 класс

Дата выдачи листа: 20.11.03.

И только Солнце снова будило его, дыша в висок,
Шептало: "Вставай, ведь такова твоя функция
Во всех попутных мирах, где горит мое колесо,
До поры, пока не вытек бензин!"

О. Медведев

Определение 1. Действительнозначной функцией называется отображение $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$. D_f называется **областью определения** функции f . Элементы D_f называются **аргументами** функции. В этом листке D_f всегда будет подмножеством $\mathbb{R}$.

Определение 2. **Графиком** функции f называется такое множество точек плоскости

$$\{(x, y) | x \in D_f, y = f(x)\}.$$

Задача 1. Для $f(x)$, имеющей график, показанный на (рис. 1), нарисуйте графики функций:

- a) $af(bx+c)+d$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$;
- b) $f^2(x)$ и $f(x^2)$;
- c) $f \circ f(x) = f(f(x))$.

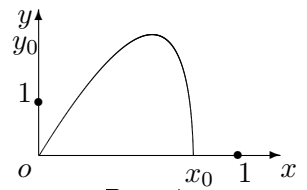


Рис. 1

Определения 3-5. Функция f называется

— **четной**, если $\forall x \in D_f : -x \in D_f$ и $f(x) = f(-x)$;

— **нечетной**, если $\forall x \in D_f : -x \in D_f$ и $f(x) = -f(-x)$;

— **периодической с периодом** $T > 0$, если $\forall x \in D_f : x+T, x-T \in D_f$ и $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$.

Задача 2. Исследуйте на четность и периодичность и нарисуйте графики функций $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$.

Задача 3. Докажите, что всякая функция представима в виде суммы четной и нечетной функций.

Задача 4. Найдите неточность в формулировке предыдущей задачи и решите ее в корректной постановке (если вы этого еще не сделали).

Задача 5. Докажите, что $\sin x + \sin \sqrt{2}x$ — непериодическая функция.

Задача 6. Постройте графики следующих функций:

a) $x + \frac{1}{x}$;

b) $x^2 + \frac{1}{x}$;

c) $\frac{1}{x^2+1}$;

d) $\frac{2x}{x^2+1}$;

e) $\frac{x^2}{x^2+1}$.

Задача 7. А теперь этих:
 $x \sin x$;

a) $\sin \frac{1}{x}$;

b) $x \sin \frac{1}{x}$;

c) $x^2 \sin \frac{1}{x}$;

d)

e) $\frac{\sin x}{x}$.

Задача 8. $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$.

Задача 9. Чем отличаются графики функций $\operatorname{tg} x$ и $\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$?

Задача 10. Строим дальше:

a) $\frac{3x+2}{2x-3}$;

b) $\frac{x^2-4x+3}{x-2}$;

c) $\sqrt{9-x^2}$;

d) $\sqrt{x^2-1}$;

e) $|x^2-4x+3|$.

Задача 11. Докажите, что если график функции f симметричен относительно прямых $x = a$ и $x = b$, то f периодична с периодом $2|a-b|$.

Задача 12. Нарисуйте графики всех функций $f(x)$ таких, что $\forall x, y \in D_f \ f(x)f(y) = f(x - y)$.

Задача 13. Найдите центр симметрии графика функции $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5}$.

Определение 6. **Индикатором** множества M называется функция $\mathbb{I}_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & x \notin M \end{cases}$

Пример: **Функция Дирихле** $D(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I}_{\mathbb{Q}}(x)$.

Задача 14. Докажите, что любое рациональное число является периодом функции Дирихле. Какие ещё функции обладают таким свойством?