

Листок №13. Предел функции

10 класс

Дата выдачи листа: 17.11.03.

«Оглянись на свое на хозяйство —
В нем, пардон, происходит фигня.
Это полный предел,
Положение дел
Не бодрит ни тебя, ни меня.»

Алексей Иващенко, Георгий Васильев
«Эй, хозяин» (сборник «Вечный думатель»)

Определение 1. ε -окрестностью x ($x \in \mathbb{R}$, ε — любое положительное число) называется множество $U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$;

Определение 2. Проколотой окрестностью точки x называется множество $\dot{U}_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$.

Определение 3. (определение предела функции **по Коши**.) Пусть функция f определена в какой-нибудь проколотой окрестности точки a . Число A называется **пределом функции f в точке a** , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(a) : f(x) \in U_\varepsilon(A)$. Обозначается $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Определение 4. Функция называется **бесконечно малой в точке a** , если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Функция называется **бесконечно большой в точке a** , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \dot{U}_\delta(a) : |f(x)| > 1/\varepsilon$. Обозначается: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Задача 1. Пользуясь только определением, найдите пределы:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} x$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} x^3$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

Задача 2. Запишите в кванторах утверждение: «число A не является пределом функции f в точке a ».

Задача 3. Докажите, что следующие функции не имеют предела в 0:

a) $\text{sign}(x)$, где по определению $\text{sign}(x) = -1$ при $x < 0$, $\text{sign}(x) = 1$ при $x > 0$, $\text{sign}(0) = 0$;
b) $\sin \frac{1}{x}$.

Задача 4. (единственность предела функции) Докажите, что если A_1 и A_2 — пределы функции f в точке a , то $A_1 = A_2$.

Задача 5. Сформулируйте и докажите теорему о двух милиционерах для предела функции.

Задача 6. Пусть в некоторой δ -окрестности точки a функция $f(x)$ определена и отлична от 0. Докажите, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} 1/f(x) = 0$.

Задача 7. (арифметика пределов) Пусть f и g определены в проколотой окрестности точки a и имеют в этой точке пределы: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Докажите, что h имеет предел в точке a и найдите его, если:

a) $h = \alpha f$, где $\alpha \in \mathbb{R}$; b) $h = f \pm g$; c) $h = f^2$; d) $h = f \cdot g$.

Задача 8. Пусть f определена в проколотой окрестности точки a и имеет в этой точке предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\forall x f(x) \neq 0$, $A \neq 0$. Докажите, что существует предел $\lim_{x \rightarrow a} 1/f(x)$ и найдите его.

Задача 9. Найдите:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{|x|} + 1} - \sqrt{\frac{1}{|x|}}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 5x + 6}{x^5 - 4x + 3}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + \dots + x - n}{x - 1}$.

Задача 10. Докажите:

a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq |x|$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Задача 11. Докажите:

a) $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$; b) $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$; c) $\lim_{x \rightarrow a} \text{tg } x = \text{tg } a$; d) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$.