

ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ

РАЗМИНКА

Аварийные выходы находятся в лифте внизу, сверху, слева, справа, спереди, сзади и на других направлениях и открываются автоматически на громкий женский крик «Спасите!»

Из Инструкции по пользованию Линейным Институтско-Факультетским Транспортером (сокращенно ЛИФТом Главного здания МГУ) производства японской фирмы «Курицанептица».

Определение 1. (Напоминание) *Предел функции в точке по Коши.* Пусть функция f определена в какой-нибудь проколотой окрестности точки a . Число A называется *пределом функции f в точке a* , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(a)$ выполнено $f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Определение 2. *Предел функции в точке по Гейне.* Пусть функций f определена в некоторой проколотой окрестности точки a . Число A называется *пределом функции f в точке a* , если для любой последовательности a_n такой, что $\forall n \ a_n \neq a$ & $a_n \in D_f$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$.

Обозначения предела: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$; $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$.

Задача 1. Определения эквивалентны.

а) Докажите, что из определения по Коши следует определение по Гейне.

б) Докажите, что из определения по Гейне следует определение по Коши.

Определение 3. Правой ε -полуокрестностью точки x назовем полуинтервал $[x, x + \varepsilon)$. Аналогично определим левую полуокрестность, проколотые полуокрестности.

Определение 4. Пусть функция f определена в какой-нибудь проколотой правой полуокрестности точки a . Число A называется *пределом справа функции f в точке a* , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a + \delta)$ выполнено $f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$; $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a+0} A$.

Если $a = 0$, вместо $0 + 0$ принято писать $+0$. Например: $\lim_{x \rightarrow +0} \text{sign}(x) = 1$.

Задача 2. Определите *предел слева*.

Задача 3. Придумайте пример функции, которая в некоторой точке

а) имеет только односторонние пределы;

б) имеет только один односторонний предел;

с) имеет слева конечный предел, а справа бесконечный.

Задача 4. Определите пределы справа и слева по Гейне.

Задача 5. Докажите:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A \ \& \ \exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A.$$

Задача 6. Что еще чему эквивалентно?

А слева и справа, в канаве и в яме —
И деньги, и слава, и счастье горстями.

Примечание: оценка «отлично» ставится за решение ВСЕХ задач, на «хорошо» достаточно решить 7 пунктов, на «удовлетворительно» — 5.