

НЕПРЕРЫВНОСТЬ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ МЕТОД (поимки льва в пустыне). Заметим, что связность тела льва во всяком случае не меньше, чем связность тора. Переводим пустыню в четырехмерное пространство. Согласно работе [1], в этом пространстве можно непрерывным образом выполнить такую деформацию, что по возвращении в трехмерное пространство лев окажется завязанным в узел. В таком состоянии он беспомощен.

Определение 1. Функция f называется *непрерывной* в точке a , если $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. $C(a)$ — множество функций, непрерывных в точке a .

Определение 2. Функция f называется *непрерывной справа* (непрерывной слева) в точке a , если $\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ ($\exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$).

Определение 3. Если функция f в точке a имеет пределы справа и слева, но не является непрерывной, говорят, что функция имеет в точке a *разрыв первого рода*. Если пределы слева и справа совпадают (но не равны значению функции в точке a или функция в этой точке не определена), то такой разрыв (первого рода, конечно) называется *устранимым*. Например, $|\operatorname{sign}(x)|$ в точке 0. Если же пределы слева и справа различны, говорят о *неустранимом разрыве*. Например, $\operatorname{sign}(x)$ в точке 0.

Определение 4. Если функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a , но по крайней мере один из односторонних пределов не существует, то говорят о *разрыве второго рода*. Например, $\operatorname{tg} x$ в точке $\pi/2$.

Задача 1. Определите непрерывную на множестве M функцию.¹ Обозначение: $f(x) \in C(M)$. Эта задача хитрее, чем кажется!

Задача 2. Сформулируйте определение непрерывной слева на отрезке $[a, b]$ функции. Верно ли, что такая функция непрерывна на интервале (a, b) ?

Задача 3. Пусть $f, g \in C(a)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Что можно сказать про функции: $\alpha f + \beta g$, fg , f/g ?

Задача 4. Пусть $f \in C(a)$,

а) докажите, что если $f(a) > 0$, то $\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(a) f(x) > 0$.

б) докажите, что существует такая окрестность точки a , в которой f ограничена. Что такое ограниченность на множестве?

в) (замена переменной) докажите, что если $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = a$, то $f \circ g$ определена в проколотой окрестности точки b и $\lim_{x \rightarrow b} f \circ g(x) = f(\lim_{x \rightarrow b} g(x)) = f(a)$. По определению композиция функций $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Задача 5.

а) Докажите, что $x \cdot D(x) \in C(0)$ и разрывна во всех остальных точках $\mathbb{R}$.

б) Постройте пример функции, непрерывной только в девяносто одной точке.

в) Постройте пример функции, определенной на отрезке $[0, 1]$ и имеющей счетное число разрывов второго рода.

г) Постройте пример всюду разрывной функции, квадрат которой всюду непрерывен.

Задача 6.* Постройте функцию на $\mathbb{R}$, непрерывную только в точках

а) $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$; б) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$; в) $\pi, \pi^2, \pi^3, \dots$; г) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$

Задача 7. (Принцип вложенных отрезков Кантора, напоминание.) Пусть $I_1, \dots, I_n, \dots$ — последовательность вложенных отрезков, т. е. $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$. Тогда существует $c \in \mathbb{R}$, принадлежащее всем I_k , т. е.

е. $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$.

Определение 5. Назовем систему множеств $I_k \subset \mathbb{R}, k \in A$ *покрытием* $M \subseteq \mathbb{R}$, если $M \subseteq \bigcup_{k \in A} I_k$.

Определение 6. Множество $M \subseteq \mathbb{R}$ называется *компактным*, если из любого набора интервалов, образующих покрытие M , можно выбрать конечное число интервалов, по-прежнему образующих покрытие M .

¹Мы вам не скажем, что это та, которую можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги.

Задача 8. Докажите, что

- а) отрезок компактен; б) интервал не компактен; с) полуинтервал не компактен.

Задача 9.

а) Докажите, что если $f \in C[a, b]$ и f принимает на концах отрезка ненулевые значения разных знаков, то существует точка отрезка $[a, b]$, в которой f обращается в нуль.

б) (Теорема Больцано о промежуточном значении.) Пусть $f \in C[a, b]$ и в каких-то точках отрезка f принимает значения ζ и ξ . Тогда f принимает все значения между ζ и ξ .

Задача 10.

а) Докажите, что функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нем.

б) Докажите, что непрерывная на отрезке функция достигает максимального и минимального значения.

с) Верно ли, что функция, непрерывная на интервале, ограничена на нем?

Задача 11. Пусть $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ — вложение (то есть различным x_1, x_2 соответствуют различные $f(x_1), f(x_2)$). Обозначим через E_f множество значений функции f . Тогда существует и единственная $g : E_f \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $g \circ f(x) = f \circ g(x) = x$. Функция g называется *обратной* к функции f . Обозначение: $g = f^{-1}$.

Определение 7. Монотонной функцией f на множестве M назовем такую определенную всюду на M функцию, что $\forall x, y (x < y) \Rightarrow (f(x) < f(y))$.

Задача 12.

а) Пусть $f \in C[a, b]$ и строго монотонна на $[a, b]$. Тогда f имеет обратную, определенную на отрезке с концами в $f(a)$ и $f(b)$, причем f^{-1} непрерывна.

б) Пусть $f \in C[a, b]$ и имеет обратную. Тогда f строго монотонна на $[a, b]$.

Задача 13. Пусть $f(x) \in C[a, b]$. Докажите, что

- а) $|f(x)| \in C[a, b]$; б) $f_c(x) \in C[a, b]$, где $f_c(x) = \begin{cases} c, & f(x) > c \\ f(x), & |f(x)| \leq c \\ -c, & f(x) < -c \end{cases}$

Задача 14.*

а) Докажите, что $\forall f \in C[a, b], \forall \varepsilon > 0$ найдутся такое покрытие интервалами $\{I_n\}$ и такая последовательность $\{a_n\} \in \mathbb{R}$, что $\forall x \in [a, b] |f(x) - \sum_n a_n \mathbb{I}_{I_n}(x)| < \varepsilon$.

б) Верно ли это утверждение для разрывных функций?

с) Докажите, что монотонная на $\mathbb{R}$ функция может иметь не более, чем счетное число разрывов.

Теперь несколько упражнений.

Задача 15. Докажите, что

- а) $\operatorname{tg} x \in C(17)$; б) $\forall a \in \mathbb{R} f_0(x) \notin C(1)$, где $f_0(x) = \begin{cases} a, & x = 1 \\ \frac{1}{x-1}, & x \neq 1 \end{cases}$;
с) $\forall m \in \mathbb{N} P_m(x) \in C(91)$, где $P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0$; $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$.

Определение 8. Определим функцию Римана $R(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \text{ где } \frac{m}{n} - \text{ несократимая дробь.} \end{cases}$

Задача 16. Найдите все точки непрерывности функции f , если

- а) $f(x) = x$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; с) $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^n \sin x^m & x \neq 0, m, n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$
д) $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \end{cases}$; е) $f(x) = D(x)$ (функция Дирихле); ф) $f(x) = R(x)$ (функция Римана).

Задача 17. Предъявите отрезки, на которых существуют обратные к $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$. Постройте графики.

Лишь у самого разрыва я неладное заметил...