

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

...не может отдать ни одного грамма, ибо все эти граммы ему абсолютно необходимы для получения производных...
«Физики шутят»

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и x — произвольная точка из этой окрестности. Тогда если выражение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$, то этот предел называется *производной* функции $f(x)$ в точке x_0 (обозначается $f'(x_0)$, $f'(x)|_{x=x_0}$).

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой левой (правой) полуокрестности точки x_0 и x — произвольная точка этой полуокрестности. Тогда если выражение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ имеет левый (правый) предел при $x \rightarrow x_0$, то этот предел называется *левой (правой) производной* функции $f(x)$ в точке x_0 (обозначается $f'(x_0 - 0)$ ($f'(x_0 + 0)$)).

Если функция определена на некотором промежутке и в каждой его точке существует ее производная, то эта производная, очевидно, является функцией, определенной на данном промежутке (обозначается $f'(x)$).

Определение 3. Назовем функцию $f(x)$ *бесконечно малой* в некоторой точке a , если ее предел в этой точке есть 0. Обозначение: $f(x) = o(1)$ при $x \rightarrow a$. Запись $f(x) = o(g(x))$ обозначает, что $f(x)$ стремится к нулю «еще быстрее, чем $g(x)$ », а именно $\lim_{x \rightarrow a} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0$. Следует понимать, что $o(g(x))$ не есть функция o от аргумента $g(x)$. $o(g(x))$ — это общее обозначение для функций от x , стремящихся к нулю в точке a с определенной скоростью.

Упражнение. Докажите, что $o(g(x)) = g(x)o(1)$.

Определение 4. Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0 , называется *дифференцируемой* в этой точке, если ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$, представимо в виде $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ (при $\Delta x \rightarrow 0$). Слагаемое $A\Delta x$ называется *дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x_0 (обозначается $df(x_0)$ или dy).

Определение 5. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке (a, b) и имеет производную $f'(x)$ в каждой его точке. Если функция $f'(x)$ имеет производную в точке $x_0 \in (a, b)$, то она называется *второй производной* функции $f(x)$ в точке x_0 (обозначается $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$). Аналогично определяется *производная n -го порядка* $f^{(n)}(x_0)$.

Задача 1. Докажите, что производная существует тогда и только тогда¹, когда существует дифференциал, причем $A = f'(x_0)$.

Задача 2. Докажите, что дифференцируемая в точке функция непрерывна в ней.

Задача 3. $\exists f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$.

Задача 4. Выведите уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x)$ в точке x_0 .

Задача 5. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в точке x_0 , а c — некоторая константа. Докажите, что в точке x_0 существуют следующие производные и выполнены следующие равенства:

a) $(cf)' = c \cdot f'$; $(f + g)' = f' + g'$;

b) $(fg)' = f'g + fg'$;

c) $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Задача 6. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $z = g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$. Докажите, что тогда сложная функция $h(x) = g(f(x))$ имеет производную в точке x_0 , причем $h'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$.

Задача 7. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производную $f'(x_0)$. Тогда и обратная функция $f^{-1}(x)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$.

Задача 8. Вычислить производные функций на их области определения:

a) $y = c$ ($c = \text{const}$); b) $y = x$; c) $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$);

d) $y = x^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$); e) $y = \sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}$); f) $y = \sin x$;

g) $y = \cos x$; h) $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$); i) $y = e^x$;

j) $y = a^x$ ($a > 0$); k) $y = x^a$ ($a \in \mathbb{R}$); l) $y = \arcsin x$;

m) $y = \text{arctg } x$.

Задача 9. Приведите пример функции, определенной на $\mathbb{R}$ и

a) дифференцируемой только в одной точке;

b) непрерывной всюду, а дифференцируемой всюду, кроме одной точки;

c*) всюду непрерывной, но нигде не дифференцируемой.

И я, по локоть засучивши рукава,
Сажусь седьмую производную считать....

¹Это утверждение верно только для функций одной переменной.