

Листок №2. Целые числа. Делимость.

9 класс

Дата выдачи листка: 27.09.2002.

«Бог создал натуральные числа, все прочее – дело рук человека»

Леопольд Кронекер

Определение 1. Будем считать данным множество **натуральных** чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ с обычными операциями **сложения** и **умножения**. То есть каждой паре натуральных чисел (a, b) сопоставлены натуральное число $a + b$ и натуральное число $a \cdot b$.

Множеством **целых** чисел $\mathbb{Z}$ назовем множество, удовлетворяющее следующим аксиомам:

- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^-, 0 \notin \mathbb{N}^-$
Элементы $\mathbb{N}$ называются **положительными**, а элементы $\mathbb{N}^-$ – **отрицательными**.
- Для любого $z \in \mathbb{Z}$ найдется такой элемент $(-z) \in \mathbb{Z}$, называемый **противоположным**, что $z + (-z) = 0$, причем противоположными к отрицательным числам являются положительные.

Для любых $a, b, c \in \mathbb{Z}$

- 1) $a + b = b + a$
- 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$
- 3) $a + 0 = a$
- 4) $a \cdot b = b \cdot a$
- 5) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- 6) $a \cdot 1 = a$
- 7) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Далее в этом листочке все строчные буквы, как правило, обозначают целые числа.

Задача 1.

- a) Докажите единственность нуля: если для любого x выполнено $x + 0 = x$ и $x + 0' = x$, то $0 = 0'$.
- b) Докажите единственность единицы.

Задача 2. Докажите единственность противоположного элемента.

Определение 2. Введем операцию **вычитания**: $x - y = x + (-y)$.

Задача 3. Докажите для любых x, y, z :

- a) $0 = (-0)$;
- b) $x \cdot 0 = 0$;
- c) $(-1) \cdot x = (-x)$;
- d) $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = (-1) \cdot x \cdot y$;
- e) $(x - y) \cdot z = (x \cdot z) - (y \cdot z)$.

Определение 3. Говорят, что a **меньше** b (обозначается $a < b$), если $a - b$ отрицательно; a **больше** b (обозначается $a > b$), если $a - b$ положительно.

Задача 4. Докажите для любых a, b, c :

- a) $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$;
- b) $a < b \Rightarrow a \cdot n < b \cdot n$, где $n \in \mathbb{N}$;
- c) $a < b$ и $b < c \Rightarrow a < c$.

Определение 4. Число a **делится** на число $b \neq 0$ (обозначается $a : b$), если найдется такое $c \in \mathbb{Z}$, что $a = bc$. b называется **делителем** a , а c – **частным** от деления a на b .

Задача 5. Докажите, что если a делится на b и b делится на c , то a делится на c .

Определение 5. Разделить с остатком число a на число b означает представить число a в виде $a = bq + r$, где $0 \leq r < b$. Число r называется **остатком**, а q **неполным частным**.

Задача 6. Верно ли, что для любых a, b и c

- a) $a : c$ и $b : c$, то $a \pm b : c$;
- b) $a \not: c$ и $b \not: c$, то $a \pm b \not: c$;
- c) $a \not: c$ и $b : c$, то $a \pm b \not: c$;
- d) $ab : c$, то или $a : c$ или $b : c$;
- e) $ab \not: c$, то $a \not: c$ и $b \not: c$?

Задача 7. Найдите остаток от деления 91^{91} на 8.

Задача 8. Сформулируйте и докажите признаки делимости на:

- a) 2, 4, 8;
- b) 3, 9;
- c) 5, 10;
- d) 11.

Задача 9. Докажите или опровергните признак делимости: если сумма цифр числа делится на 27, то и само число делится на 27.

Задача 10. В числе переставили местами цифры, и оказалось, что оно уменьшилось в три раза. Докажите, что исходное число делится на 27.

Задача 11. Найдите наименьшее число, дающее при делении на 3, 7, 9, 11 остатки 2, 6, 8, 10 соответственно.

Определение 6. Принцип Дирихле. Если в k клетках сидят $k + 1$ кроликов, то хотя бы в одной клетке сидит более одного кролика.

Задача 12. Докажите, что из любых $n + 1$ чисел можно выбрать два, разность которых делится на n . Верно ли это для суммы?

Задача 13. Известно, что a^2 делится на $a - b$. Докажите, что и b^2 делится на $a - b$.

Задача 14. Числа a и b целые, причём $2a + 3b$ делится на 7. Докажите, что $a + 5b$ также делится на 7.