

Листок №3. Математическая индукция

9 класс

Дата выдачи листа: 14.10.02.

«Наверное, каждому приходилось выстраивать в ряд костяшки домино. Толкнешь первую – она повалит вторую, та – третью и так до тех пор, пока не упадут все.»

И. С. Рубанов

Определение 1. Принцип математической индукции. Пусть дана бесконечная цепочка утверждений, пронумерованных натуральными числами: $A_1, A_2, A_3, \dots$. Каждое из этих утверждений может быть либо истинным, либо ложным. Пусть известно:

1) (**Базис индукции**) утверждение A_1 истинно;

2) (**Шаг индукции**) для любого натурального числа n из истинности A_n следует истинность A_{n+1} .

Тогда все утверждения A_n истинны.

Внимание: все задачи этого листка требуется доказывать при помощи принципа математической индукции. То есть требуется сформулировать базис индукции и доказать его истинность, затем сформулировать шаг индукции и доказать его истинность.

Задача 1. Доказать:

- a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
- b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Задача 2. Доказать формулы для суммы первых n членов

- a) арифметической прогрессии;
- b) геометрической прогрессии.

Задача 3. Найти суммы:

- a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n$;
- b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$;
- c) $\sum_{k=1}^n (k \cdot k!)$.

Задача 4. Доказать для любого натурального n :

- a) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9$;
- b) $3^{2n+2} + 8n - 9 : 16$;
- c) $* ab^n + cn + d : m$, если $a + d : m, (b-1)c : m, (b-1)a + c : m$.

Задача 5. На сколько частей делят плоскость n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке?

Задача 6. На плоскости проведено несколько прямых. Доказать, что плоскость можно раскрасить в два цвета так, чтобы соседние области (т. е. области, имеющие общий отрезок) были закрашены разными цветами.

Задача 7. («Ханойская башня») Есть пирамидка, состоящая из стержня и n колец разного размера, сложенных так, что меньшее лежит на большем, и еще два таких же стержня. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с любого стержня на любой другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Доказать:

- a) Можно переложить все кольца на один из пустых стержней;
- b) Можно сделать это за $2^n - 1$ перекладываний;
- c) За меньшее число перекладываний этого сделать нельзя.

Задача 8. На МКАД расставлены бочки с горючим. Горючего, находящегося во всех бочках, хватает, чтобы проехать всю МКАД. Докажите, что, начиная от некоторой бочки, можно проехать всю МКАД.

Задача 9. Пусть дана бесконечная цепочка утверждений $A_1, A_2, A_3, \dots$. Пусть известно, что утверждение A_1 истинно и для любого натурального числа n из истинности $A_1, A_2, \dots, A_n$ следует истинность A_{n+1} . Доказать, что все утверждения A_n истинны.

Задача 10. Доказать, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких попарно различных целых неотрицательных степеней двойки.

Задача 11. Кусок бумаги разрешается рвать на 4 или 6 частей. Доказать, что таким образом можно получить любое число кусков, начиная с 9.

Задача 12. (неравенство Бернулли) Пусть $a > -1$, тогда для любого натурального n справедливо неравенство $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Задача 13. Пользуясь принципом математической индукции, докажем, что все коты одного цвета. Базис индукции: любой кот одного цвета. Шаг индукции: пусть любые n котов одного цвета; возьмем стаю из $n + 1$ котов, докажем что все они одного цвета. Уберем из стаи одного кота, оставшиеся n будут одного цвета согласно сделанному предположению; вернем этого кота и уберем другого, оставшиеся опять будут одного цвета; значит, все $n + 1$ котов одного цвета. Согласно принципу мат. индукции все коты одного цвета.

Верно ли приведенное рассуждение?

Определение 2. Говорят, что некоторое утверждение выполнено **почти для всех** натуральных чисел, если оно не выполнено лишь для конечного числа натуральных чисел.

Задача 14. (Эту задачу не обязательно решать с помощью принципа мат. индукции) Верны ли следующие утверждения почти для всех натуральных чисел n ?

- a) $n > 91$;
- b) $1.001^n > 100.1 \cdot n$;
- c) $2^n > n^2$;
- d) $n! > n^n$.

Задача 15. Верно ли почти для всех натуральных n , что если число $a + 1/a$ – целое, то число $a^n + 1/a^n$ – тоже целое?