

Листок №4. Алгоритм Евклида, основная теорема арифметики

9 класс

Дата выдачи листка: 18.11.02.

«Исчезнут грезы, печали, сны ... Останутся простые числа.»

Карен Джангиров. «Простые числа».

В этом листке строчные латинские буквы обозначают натуральные числа, если не оговорено иное.

Задача 1. Теперь нам потребуется **деление**. a, b, c – целые числа.

a) Докажите, что если $ab = ac$ и $a \neq 0$, то $b = c$.

b) Докажите, что если a и b – частные от деления c на d , то $a = b$.

Определение 1. Если a делится на b , то частное от деления a на b обозначается как $a : b$.

Определение 2. **Наибольший общий делитель a и b – НОД(a, b)** – это наибольшее натуральное число, являющееся делителем a и b .

Определение 3. **Наименьшее общее кратное a и b – НОК(a, b)** – это наименьшее натуральное число, делящееся на a и b .

Определение 4. Числа a и b называются **взаимно простыми**, если $\text{НОД}(a, b) = 1$.

Задача 2. Докажите, что $a : \text{НОД}(a, b)$ и $b : \text{НОД}(a, b)$ взаимно просты.

Задача 3. p – простое число. Сколько существует натуральных чисел, меньших p и взаимно простых с ним? Меньших p^2 и взаимно простых с ним?

Задача 4. (**Алгоритм Евклида**) Пусть $a > b > 0$, r – остаток от деления a на b ($0 \leq r < b$).

a) Докажите, что $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r)$.

Заменяем пару (a, b) парой (b, r) и проведем такие же рассуждения и т.д.

b) Докажите, что этот процесс за конечное число шагов закончится на паре $(d, 0)$, причем $d = \text{НОД}(a, b)$.

Hint: мы уже большие и можем обойтись без «и т. д.»

c) Докажите, что найдутся такие целые u и v , что $au + bv = \text{НОД}(a, b)$.

Задача 5. Используя алгоритм Евклида, найдите $\text{НОД}(13471836, 8359848)$.

Задача 6. Найдите $\text{НОД}(2n + 13, n + 7)$ (для любого n).

Задача 7. Есть две банки, емкости которых равны 310 мл и 210 мл. Можно ли с помощью этих двух банок перелить из полной бочки достаточного объема в такую же пустую

a) 3000 мл; b) 10 мл; c) 45 мл?

Hint: Задача включена в этот листок не для того, чтобы ее решали методом перебора.

Определение 5. Натуральное число называется **простым**, если оно имеет ровно два различных натуральных делителя.

Определение 6. Натуральное число называется **составным**, если оно имеет более двух различных натуральных делителей.

Задача 8. Найдите все такие простые p , что $p + 17$ также простое.

Задача 9. * Пусть $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, не являющийся константой. Докажите, что существует такое целое n , что $f(n)$ составное.

Задача 10. Докажите, что если $(m-1)! + 1$ делится на m , где m отлично от единицы, то m – простое.

Задача 11. Верно ли, что числа $91! + k$, где $1 < k \leq 91$ – составные?

Задача 12. Верно ли, что для любого n найдется n подряд идущих составных чисел?

Задача 13. (**Основная теорема арифметики**) Всякое натуральное число, большее единицы, разлагается в произведение простых чисел, причем единственным образом (с точностью до перестановки множителей).

a) Для любого n , всякое число, не превосходящее n , раскладывается на простые множители.

b) Пусть p – простое, $ab : p$. Докажите, что $a : p$ или $b : p$.

Hint: Предположить, что a на p не делится и воспользоваться задачей №4(c).

c) Пусть p – простое, $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n : p$. Докажите, что найдется такое i ($1 \leq i \leq n$), что a_i делится на p .

d) Докажите единственность разложения.

Задача 14. * Приведите другие доказательства основной теоремы арифметики.

Задача 15. Докажите, что для всех a и b выполнено $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = a \cdot b$.

Задача 16. Верно ли, что $a = b \Leftrightarrow \text{НОД}(a, b) = \text{НОК}(a, b)$?

Задача 17. Докажите, что простых чисел бесконечно много.