

Листок №4. Разбор полета

9 класс

Дата выдачи листка: 14.02.03.

«Повторение — мать учения»

Решение 4. (Алгоритм Евклида)

а) Разделим a на b с остатком. $a = b \cdot q + r$, поэтому общие делители b и r являются делителями a (проверяется очевидным образом). Тогда $\text{НОД}(a, b) \geq \text{НОД}(b, r)$. $r = a - b \cdot q$, поэтому общие делители a и b являются общими делителями b и r . Тогда $\text{НОД}(a, b) \leq \text{НОД}(b, r)$. Отсюда $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r)$.

б) Поскольку при переходе от пары (r_{k-1}, r_k) к паре (r_k, r_{k+1}) всегда r_{k+1} меньше r_k по крайней мере на единицу, процесс остановится по крайней мере за b шагов. Пусть процесс завершился за n шагов. Каждый раз НОД сохраняется, поэтому для любого n выполнено: $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(r_{n-1}, r_n) = r_n$, где $r_{n-1} \div r_n$, $r_{n-1} = q_n \cdot r_n + 0$. Совсем строго можно провести индукцию по переменной n .

в) Для доказательства этого утверждения можно рассмотреть алгоритм Евклида с конца. Пусть n — количество шагов, которое необходимо произвести в алгоритме Евклида. Базис: $n = 0$, $a = b \cdot q$, $\text{НОД}(a, b) = b$, тогда $\text{НОД}(a, b) = 0 \cdot a + 1 \cdot b$. Переход: пусть для пары (a, b) необходимо выполнить $n + 1$ шаг алгоритма. $a = b \cdot q + r$. По предположению индукции $\text{НОД}(b, r) = u \cdot b + v \cdot r$. Тогда $v \cdot a = v \cdot b \cdot q + v \cdot r$; $v \cdot r = v \cdot a - v \cdot b \cdot q$; $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r) = u \cdot b + (v \cdot a - v \cdot b \cdot q) = v \cdot a + (u - v \cdot q) \cdot b$. Утверждение доказано.

Решение 7. При переливаниях мы, очевидно, получаем объем, кратный $\text{НОД}(210, 310) = 10$. Строго это можно доказать по индукции по числу переливаний. Поэтому 45 мл получить невозможно. Найдутся такие u и v , что $210u + 310v = 10$. Очевидно, что одно из чисел u и v положительно (например, u), а другое — отрицательно (например, v). Тогда для получения 10 мл достаточно налить u раз по 210 мл и отлить v раз 310 мл. Проведя такую процедуру 300 раз, мы получим 3000 мл. Фокус в том, что мы решили задачу, не приводя конкретный алгоритм.

Решение 13. (Основная теорема арифметики)

а) Произведение нуля сомножителей логично определить равным единице, поэтому для $n = 1$ утверждение выполнено. Пусть $n > 1$. Тогда оно либо простое и раскладывается в произведение одного множителя — себя, либо составное, $n = m \cdot k$. Повторим рассуждения для m и k . Поскольку каждый раз $\max(m, k)$ меньше n по крайней мере на единицу, процесс остановится.

б) Предположим, что a не делится на p . Тогда они, очевидно, взаимно просты. Тогда найдутся $u, v \in \mathbb{Z}$, что $a \cdot v + p \cdot u = 1$. Домножим обе части на b : $abv + pbu = b$. Каждое из слагаемых в левой части делится на p , значит и правая часть равенства тоже делится. Утверждение доказано.

в) Доказательство очевидно по индукции.

г) Предположим нашлось по крайней мере два разложения некоторого числа: $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_m$. Сократим общие множители. Получим: $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_l$. В левой части могло не остаться ни одного множителя ($k = 0$), то есть $1 = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_l$, значит и справа сократились все сомножители, то есть разложения совпадали. Иначе в левой части найдется простое число p_1 , что $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k \div p_1$, а значит $q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_l \div p_1$. Тогда найдется простое число q_1 , которое делится на неравное ему p_1 . Противоречие. Теорема доказана.

Решение 17. Предположим, что простых чисел конечно. Тогда рассмотри $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$, где $p_1, p_2, \dots, p_n$ — все простые числа. Очевидно, что p не делится ни на одно из p_k , что противоречит существованию разложения на простые множители.