

Листок №5. Рациональные числа

9 класс

Дата выдачи листка: 27.12.02.

«Мюи – планета Кошмаров и Молибдена. В ее болотах из расплавленного свинца, в атмосфере из паров уксусной кислоты, в облаках страшного ДДТ, извергаемых исполинскими вулканами, могли существовать только нейробы – кибер-нейро-роботы, основатели и продолжатели Рациональной Цивилизации Машин.»

Борис Зубков, Евгений Муслин «Зеленая кнопка»

Определение 1. **Рациональным числом** называется число вида $\frac{a}{b}$ (такая запись называется **обыкновенной дробью**); обыкновенная дробь также может записываться в виде a/b , где $a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{Z}$, причем $b \neq 0$. a называется **числителем** дроби, b – **знаменателем** дроби. Множество всех рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$.

Примечание. Запись $a : b$ – не дробь.

Коротко вышеприведенное определение можно записать так: $\mathbb{Q} = \{q \mid q = \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.

Все дроби в этом листке считаются рациональными числами. Буквы a, b, c, d обозначают целые числа, буквы p, q, r, s – рациональные числа.

Определение 2. Числа a/b и c/d **равны** тогда и только тогда, когда $a \cdot d = b \cdot c$; положим также, что $a/1 = a$ для любого $a \in \mathbb{Z}$.

Задача 1. Докажите: $a : b = c \Leftrightarrow a/b = c$ (знаком «:» обозначена операция деления, введенная в предыдущем листке).

Задача 2. Докажите: $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0, c \neq 0$).

Примечание. Утверждение этой задачи называют **основным свойством дроби**.

Определение 3. На множестве $\mathbb{Q}$ определены операции сложения и умножения, т. е. каждой паре чисел $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$ сопоставлены числа $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ и $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$. Эти операции вводятся следующим образом:

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$;
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Задача 3. Докажите для всех рациональных чисел:

- $p + q = q + p, p \cdot q = q \cdot p$;
- $(p + q) + r = p + (q + r), (p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$;
- $(p + q) \cdot r = p \cdot r + q \cdot r$.

Задача 4. Докажите для всех рациональных чисел:

- $q + 0 = q$;
- $q \cdot 0 = 0$;
- $q \cdot 1 = q$.

Определение 4. Для рациональных чисел понятия противоположного числа и разности вводятся аналогично соответствующим понятиям для целых чисел: $q + (-q) = 0, p - q = p + (-q)$.

Задача 5. Докажите, что для любого $q = a/b$ противоположное число $-q$ существует, единственно и равно $-\frac{a}{b}$. Как понимается термин «единственность» в случае рациональных чисел?

Определение 5. Число q называется **обратным** числу p , если $p \cdot q = 1$ (обозначается $q = p^{-1}$).

Задача 6. Докажите существование и единственность обратного числа для любого $p \neq 0$. Как понимается термин «единственность» в случае рациональных чисел?

Задача 7. Докажите: $(p^{-1})^{-1} = p$ ($p \neq 0$).

Теперь можно ввести операцию деления для рациональных чисел.

Определение 6. Пусть даны числа p и q , $q \neq 0$. Число r называется **частным** от деления p на q , если $p = q \cdot r$ (обозначается $r = p : q$).

Задача 8. Докажите, что для любых p и q ($q \neq 0$) частное $p : q$ существует, единственно и равно $p \cdot q^{-1}$.

Задача 9. Докажите, что данное определение согласуется с определением, данным ранее для целых чисел, т.е. $a : b = c \Leftrightarrow \frac{a}{1} \cdot \left(\frac{b}{1}\right)^{-1} = \frac{c}{1}$.

Определение 7. Расширим понятие дроби: пусть по определению $p/q = p : q$ (теперь $p, q \in \mathbb{Q}$; $q \neq 0$).

Теперь можно считать записи x/y и $x : y$ эквивалентными не зависимо от того, что из себя представляют числа x и y (т.е. x и y могут быть целыми числами, рациональными числами или выражениями, результаты вычисления которых являются рациональными числами).

Определение 8. Рациональное число $\frac{a}{b}$, где $b \in \mathbb{N}^+$, называется **положительным**, если $a \in \mathbb{N}^+$, и **отрицательным**, если $a \in \mathbb{N}^-$. Если $b \in \mathbb{N}^-$, то $\frac{a}{b}$ — положительно $\Leftrightarrow \frac{-a}{-b}$ — положительно, $\frac{a}{b}$ — отрицательно $\Leftrightarrow \frac{-a}{-b}$ — отрицательно.

Определение 9. Говорят, что p **меньше** q (обозначается $p < q$), если $p - q$ отрицательно; p **больше** q (обозначается $p > q$), если $p - q$ положительно.

Задача 10. Докажите для любых p, q, r :

- a) $p < q \Leftrightarrow p + r < q + r$; b) $p < q$ и $q < r \Rightarrow p < r$;
c) $p < q \Rightarrow p \cdot r < q \cdot r$, где r — положительно.

Задача 11. Пусть $p > q, r > s$. Верно ли:

- a) $p + r > q + s$; b) $p - s > q - r$;
c) $p \cdot r > q \cdot s$; d) $p/s > q/r$ ($r \neq 0, s \neq 0$).

Задача 12. Обобщите понятие взаимно простых чисел с натуральных на целые.

Определение 10. Дробь a/b называется **несократимой**, если a и b взаимно просты и $b \in \mathbb{N}$.

Задача 13. Докажите, что любое рациональное число можно единственным образом представить в виде несократимой дроби. Что значит в данном случае «представить единственным образом»?

Задача 14. $a/b = c/d$, c/d — несократимая дробь. Выразите c и d через a и b .

Определение 11. Пусть $n \in \mathbb{Z}$; **n -ой степенью** числа q называется число q^n , определенное следующим образом:

- если $n \in \mathbb{N}$, то $q^n = \underbrace{q \cdot q \cdot \dots \cdot q}_{n \text{ раз}}$;
- если $n \in \mathbb{N}^-$, то $q^n = (q^{-n})^{-1}$ для $q \neq 0$, 0^n не определен;
- если $n = 0$, то $q^n = 1$ для $q \neq 0$, 0^0 не определен.

Задача 15. Докажите для любых $p, q \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{Z}$:

- a) $(p \cdot q)^n = p^n \cdot q^n$; b) $q^{m+n} = q^m \cdot q^n$; c) $p^{m \cdot n} = (p^m)^n$;
d) * $n \in \mathbb{N}$: $(p + q)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k}$, где $C_n^k = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, k \leq n; \\ 0, k > n. \end{cases}$

Примечание. Последнее выражение известно как **бином Ньютона**.

Задача 16. * $k, n \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n$. Докажите:

- a) У множества из n элементов ровно C_n^k подмножеств из k элементов;
b) $C_n^k = C_n^{n-k}$; c) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$; d) $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$.

Задача 17. Существует ли такое рациональное число q , что $q^2 = 2$?