

Листок №6. Соответствия, отношения

9 класс

Дата выдачи листка: 17.01.03.

— Это, дядюшка, вещественные¹ знаки... не вещественных отношений...

И. А. Гончаров. «Обыкновенная история».

Отношение вожделения к предмету есть безусловно еще отношение себялюбивого разрушения, а не отношение создания.

Георг Вильгельм Фридрих Гегель

Определение 1. Для записи математических выражений удобно использовать следующие знаки: «&» — читается как «и», $\vee$ — как «или», $\neg$ — как «не», $\Rightarrow$ — как «следует».

Определение 2. Кванторами называются следующие значки: $\forall$ — «для любого», $\exists$ — «существует», $\exists!$ — «существует единственный». После $\exists$ и $\exists!$ может ставиться двоеточие, оно читается как «такой, что».

Например, $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{Z} : \exists z \in \mathbb{Z} : z \leq x \leq y$ означает, что для любого натурального x существует целый y такой, что найдется такой z из множества целых чисел, что $z \leq x \leq y$.

Задача 1. Какие из нижеследующих утверждений истинны?

- a) $\forall a \in \mathbb{Z} \exists b \in \mathbb{Z} : a \cdot b = 0$;
- b) $\forall a \in \mathbb{Z} \exists! b \in \mathbb{Z} : a \cdot b = 0$;
- c) $\forall a \exists b : a + b = 0$;
- d) $\exists b : \forall a a + b = 0$;
- e) $\forall a, b (a \leq b) \& (a \geq b) \Rightarrow (a = b)$.

Задача 2. Напишите отрицания к утверждениям из предыдущей задачи, не используя значок « $\neg$ ».

Определение 3. (Напоминание) **Декартовым произведением** множеств A и B называется множество упорядоченных пар (a, b) , где $a \in A, b \in B : A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \& (b \in B)\}$.

Определение 4. **Бинарным отношением** на множестве A называется подмножество R декартового произведения A на себя: $R \subset A \times A$. Про элементы $x, y \in A$ говорят, что они находятся в отношении R , если $(x, y) \in R$. Обозначение: xRy .

Задача 3. Нарисуйте на координатной плоскости OXY множества точек, координаты которых находятся в следующих отношениях:

- a) $x < y$;
- b) $x = -y$;
- c) $x^2 < y$.

Определение 5. Бинарное отношение « $\sim$ » на A называется **отношением эквивалентности**, если выполнено: $\forall x, y, z \in A$:

- 1) $x \sim x$ (рефлексивность);
- 2) $(x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$ (симметричность);
- 3) $((x \sim y) \& (y \sim z)) \Rightarrow (x \sim z)$ (транзитивность).

Запись $x \sim y$ означает, что элементы x, y находятся в отношении эквивалентности, или **эквивалентны**.

Примечание. На любом множестве A можно ввести отношения эквивалентности $R = \{(a, a) \mid a \in A\}$ и $R' = A \times A$.

Задача 4. Являются ли следующие отношения отношениями эквивалентности:

- a) $a = b$ (равенство чисел);

¹Вы уже прошли тип `real` в Pascal'e?

- b) $A = B$ (равенство множеств);
- c) $a : b$ на $\mathbb{Z}$;
- d) $a \leq b$ на $\mathbb{N}$;
- e) $a \parallel b$ (прямые на плоскости)?

Задача 5. * Приведите другие примеры.

Примечание. Хорошо бы набрать не менее 42-ух разумных примеров с класса :-).

Задача 6. Может ли отношение эквивалентности на $\mathbb{N}$ содержать конечное число пар? Приведите примеры.

Определение 6. *Отношением нестрогого порядка* ' $\leq$ ' на множестве A называется такое бинарное отношение, что для всех $x, y, z \in A$ выполнено:

- 1) $x \leq x$ (рефлексивность);
- 2) $((x \leq y) \& (y \leq x)) \Rightarrow (x = y)$ (антисимметричность);
- 3) $((x \leq y) \& (y \leq z)) \Rightarrow (x \leq z)$ (транзитивность).

Порядок называется линейным, если $\forall x, y \in A ((x \leq y) \vee (y \leq x))$.

Задача 7. По аналогии дайте определение отношения строгого порядка ' $<$ ' так, чтобы под него подходило отношение «меньше», введенное нами раньше.

Задача 8. Введите какие-нибудь отношения порядка и эквивалентности на следующих множествах:

- a) $\mathbb{N}$;
- b) $\mathbb{N}^4 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; ²
- c) координатная плоскость.

Определение 7. *Соответствием* между множествами A и B называется множество $R \subset A \times B$ (обозначение: $R : A \rightarrow B$). Про элементы $a \in A$ и $b \in B$ говорят, что они находятся в соответствии R , если $(a, b) \in R$.

Определение 8. *Область определения* соответствия R — это множество всех $a \in A$, для которых найдется $b \in B$ такое, что $(a, b) \in R$. $Dom(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in R\}$.

Определение 9. *Область значений* соответствия R — это множество всех $b \in B$, для которых найдется элемент a из A такой, что $(a, b) \in R$. $Im(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A : (a, b) \in R\}$.

Определение 10. В паре $(a, b) \in R$ b называется *образом* a , а a — *прообразом* b .

Определение 11. *Отображением (функцией)*³ f из A в B называется такое соответствие, что для любого элемента $a \in A$ существует единственное $b \in B$ такое, что $(a, b) \in f$. Обозначения: $f : A \rightarrow B$, $b = f(a)$, $a \xrightarrow{f} b$.

Задача 9. Сколько существует

- a) соответствий между A и B ;
- b) отображений из A в B ;
- c) соответствий R между A и B , что $Dom(R) = A$;
- d) отображений f из A в B , что $Im(f) = B$;

если в A — n элементов, а в B — m ?

Задача 10. * Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел (мы с ними еще познакомимся). Над функциями тоже можно ввести операции.

- a) Как определить умножение $f \cdot g$, сложение $f + g$?
- b) А $g \circ f$? *Hint:* Например, если $f(x) = x + 2$, а $g(y) = y + 3$, то $(g \circ f)(x) = x + 5$.
- c) Проверьте свойства: ассоциативность ($abc = a(bc)$), коммутативность ($ab = ba$), существование «единицы» ($\exists a : \forall b \ ab = ba = b$)...

²Ну чем вам не четырехмерное пространство? (Шутка)

³Честно говоря, что только функцией не называется.