

Листок №7. Равномощность. Счетные множества

9 класс

Дата выдачи листка: 21.02.03.

«За время создания «Мастера и Маргариты» его духовные ориентиры сместились от монотеизма к дуализму - равномощности доброго и злого начал бытия.»

М. Першин, «Мастер и Маргарита»: Господь глазами «очевидца»

Определение 1. Отображение f из множества A в множество B называется **сюръективным** (**сюръекцией**), если $Im(f) = B$.

Определение 2. Отображение f из множества A в множество B называется **инъективным** (**инъекцией**), если $\forall x, y \in A \ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, т. е. различным прообразам соответствуют различные образы.

Определение 3. Отображение f из множества A в множество B называется **биективным** (**биекцией**), если оно сюръективно и инъективно.

Задача 1. Приведите примеры отображений на числовых множествах:

- a) сюръективных; b) инъективных; c) биективных.

Определение 4. Соответствие R между множествами A и B называется **взаимно однозначным**, если выполнено:

- $\forall x \in A \ \exists! y \in B : (x, y) \in R$;
- $\forall y \in B \ \exists! x \in A : (x, y) \in R$.

Задача 2. Докажите, что биекция и взаимно однозначное соответствие — это одно и то же.

Определение 5. Множества A и B называются **равномощными**, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие (обозначается $A \sim B$).

Задача 3. На каком множестве задано отношение «равномощность множеств»? Является ли это отношение отношением эквивалентности; отношением порядка?

Задача 4. Какие из следующих множеств равномощны: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{0\}, \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 5\}, \{a, b, c\}, \{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 < 9\}, \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 = 2\}$?

Определение 6. Число элементов конечного множества A обозначается $|A|$ и называется **мощностью** этого множества.

Задача 5. Верно ли, что $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$, где A, B — конечные множества?

Определение 7. Множество, равномощное множеству $\mathbb{N}$, называется **счетным**. Бесконечное множество, не являющееся счетным, называют **несчетным**.

Примечание. Иногда несчетность множества удобно доказывать от противного: предполагаем, что все элементы занумерованы и находим такой элемент, которому ничего не соответствует.

Задача 6. Докажите счетность следующих множеств: множество отрицательных целых чисел; множество четных натуральных чисел; множество целых чисел.¹

Задача 7. Пусть множества $A_1, A_2, A_3, \dots$ счетны. Будут ли счетными множества:

- a) $A_1 \cup A_2$;
b) $\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ (n множеств);
c) $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots$ (счетное число множеств);
d) $A_1 \times A_2$?

¹Всегда ли часть меньше целого?

Задача 8. Счетно ли множество всевозможных бесконечных цепочек из нулей и единиц?

Задача 9. Докажите:

a) A — бесконечно $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists M \subset A : |M| = n$;

b) у любого бесконечного множества есть счетное подмножество.

Примечание. В этом смысле множество натуральных чисел — самое «маленькое» бесконечное множество.

Задача 10. Докажите, что любое подмножество счетного множества либо конечно, либо счетно.

Задача 11. Счетно ли множество простых чисел?

Задача 12. Счетно ли множество рациональных чисел?

Задача 13. Докажите равномощность (отрезок, интервал и пр. — множества точек):

a) отрезка $[0, 1]$ и отрезка $[a, b]$;

b) прямой и интервала $(0, 1)$;

c) отрезка $[0, 1]$ и интервала $(0, 1)$;

d) любых двух окружностей;

e) окружности и полуокружности (включая концевые точки);

f) окружности и прямой.

Задача 14. Пусть A, B — бесконечные равномощные множества. Докажите:

a) $A \cup \mathbb{N} \sim A$;

b) $A \cup B \sim A$.

Задача 15. * Теорема Кантора-Бернштейна Если A равномощно некоторому подмножеству B , а B равномощно некоторому подмножеству A , то A равномощно B .

Примечание. В дальнейших задачах можно использовать эту теорему без доказательства.

Задача 16. Докажите, что квадрат (вместе с внутренностью) равномощен отрезку.

Определение 8. Сравнение мощностей. Пусть A и B произвольные множества. Тогда логически возможны 4 случая:

- 1) A равномощно некоторому подмножеству B , а B равномощно некоторому подмножеству A . Тогда по теореме Кантора-Бернштейна $A \sim B$.
- 2) A равномощно некоторому подмножеству B , но B не равномощно никакому подмножеству A . Тогда говорят, что B **более мощно**, чем A .
- 3) A более мощно, чем B .
- 4) Ни одно подмножество A не равномощно B , и ни одно подмножество B не равномощно A . Примем без доказательства, что такого не может быть...²

Сейчас мы узнаем промышленный способ получения «больших» множеств.

Задача 17. Теорема Кантора. Множество всех подмножеств множества A более мощно, чем A .

Hint: Доказательство от противного. Нужно предположить, что множества равномощны, и рассмотреть такие элементы $a \in A$, которые не содержатся в подмножествах, которые им соответствуют.

Определение 9. Мощность множества всех подмножеств множества натуральных чисел называется **континуум**. Мы еще познакомимся с ним ближе.

²...потому что не может быть никогда.