

Листок №8. Грани

9 класс

Дата выдачи листка: 21.03.03.

«Самая точная грань настоящего — красота уходящей женщины.»

Карен Джангиров

«Я на рельсы выхожу, на страну свою гляжу:

Где ж за гранью снежных зим есть открытый магазин.»

Юрий Визбор

Определение 1. Числовое множество M называется **ограниченным сверху**, если $\exists C : \forall x \in M \ x \leq C$.

Задача 1. Сформулируйте определение **ограниченного снизу** множества и **неограниченного сверху** множества.

Определение 2. Множество M называется **ограниченным**, если оно ограничено сверху и снизу.

Определение 3. Множество M называется **ограниченным**, если $\exists C : \forall x \in M \ |x| \leq C$.

Задача 2. Докажите эквивалентность определений ограниченного множества.

Задача 3. Приведите пример ограниченного множества, неограниченного снизу множества...

Определение 4. Число C называется **верхней гранью** множества M , если любой элемент из M меньше или равен C : $\forall x \in M \ x \leq C$.

Определение 5. Число C называется **точной верхней гранью (Supremum)** множества M , если C — верхняя грань и любое $C' < C$ верхней гранью не является. Обозначение: $C = \sup M$.

Задача 4. Дайте определение **нижней грани** и **точной нижней грани (Infimum)**. Обозначение: $C = \inf M$.

Задача 5. Может ли множество иметь две точные верхние грани?

Задача 6. Множества A и B ограничены сверху. Верно ли, что C ограничено сверху, если:

a) $C = A \cup B$;

b) $C = A \cap B$;

c) $C = A + B = \{a + b \mid a \in A \ \& \ b \in B\}$;

d) $C = A \cdot B = \{ab \mid a \in A \ \& \ b \in B\}$;

e) $C = 2A = \{2 \cdot a \mid a \in A\}$?

Задача 7. (Пункты а-е). Имеет ли множество C в предыдущей задаче точную верхнюю грань? Если да, то найдите ее ($\sup A$ и $\sup B$ считайте известными).

Задача 8. Докажите, что множество $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, x^2 < 2\}$

a) ограничено сверху;

b) не имеет точной верхней грани в $\mathbb{Q}$.

Hint: Предположите существование точной верхней грани и предъявите элемент из M , который ее превосходит.