

Листок №9. Действительные числа. Аксиома полноты

9 класс

Дата выдачи листка: 07.04.03.

«И полнота, коль велика, на пустоту
Бывает все-таки похожа, но деянья
Ее превыше всяких сил и понимания.
Нет невозможного спокойному Уму.»
Лао Цзы

А теперь то, чего вы так долго ждали!

Определение 1. Действительные числа можно определить как такое множество $\mathbb{R}$ с введенными операциями умножения, сложения и отношением порядка, на котором выполнены следующие естественные свойства:

- 1) $\forall a, b \in \mathbb{R} \ a + b = b + a$ (коммутативность сложения);
- 2) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \ (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения);
- 3) $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \ a + 0 = a$;
- 4) $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$;
- 5) $\forall a, b \in \mathbb{R} \ a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативность умножения);
- 6) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативность умножения);
- 7) $\exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \forall a \in \mathbb{R} \ 1 \cdot a = a$;
- 8) $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = 1$;
- 9) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивность умножения относительно сложения);
- 10) $\forall a, b \in \mathbb{R} \ (a \leq b) \vee (b \leq a)$;
- 11) $\forall a, b \in \mathbb{R} \ (a \leq b) \& (b \leq a) \Rightarrow (a = b)$;
- 12) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \ (a \leq b) \& (b \leq c) \Rightarrow (a \leq c)$;
- 13) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \ (a \leq b) \Rightarrow (a + c \leq b + c)$;
- 14) $\forall a, b, c \geq 0 \in \mathbb{R} \ (a \leq b) \Rightarrow (a \cdot c \leq b \cdot c)$;
- 15) **Аксиома полноты.** Всякое непустое ограниченное сверху подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань.

Новым и самым интересным оружием для нас в этом определении является **аксиома полноты**. Ноль и единица входят в множество действительных чисел. Из них с помощью сложения получаются натуральные числа. Дальше строятся целые и рациональные числа. То есть $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Задача 1. * Докажите, используя аксиоматику действительных чисел:

- | | |
|--|--|
| a) $(-1)^{-1} = -1$; | b) $-a = (-1) \cdot a$; |
| c) $(0 \leq a) \& (0 \leq b) \Rightarrow (0 \leq a + b)$; | d) $(0 \leq a) \& (0 \leq b) \Rightarrow (0 \leq a \cdot b)$; |
| e) $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$; | f) $a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$. |

Задача 2. Докажите, что $0 \leq 1$.

Задача 3. Докажите, что всякое ограниченное снизу непустое множество имеет точную нижнюю грань.

Задача 4. Введите на $\mathbb{R}$ отношения ' $\geq$ ', ' $<$ ' и ' $>$ '. Докажите, что ' $<$ ' — отношение строгого порядка.

Определение 2. Принцип Архимеда. Натуральные числа не ограничены сверху. Другими словами $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$.

Задача 5. Докажите принцип Архимеда через аксиому полноты.

Задача 6. Докажите, что $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Задача 7. Докажите: $\exists! x > 0 : x^2 = 2$ (слово «корень» использовать нельзя).

Определение 3. Иногда удобно представлять действительные числа в виде **бесконечных десятичных дробей (БДД)**. При этом мы запрещаем 9 в периоде (считаем, что, например, $0.(9) = 1$) и $-0.(0)$ (считаем, что $-0.(0) = 0.(0)$). Примем без доказательства¹, что множество всевозможных БДД удовлетворяет определению 1 (т. е. является множеством действительных чисел).

Задача 8. Определите правило, по которому сравниваются БДД.

Задача 9. Покажите, что аксиома полноты для множества БДД выполняется, т. е. любое непустое ограниченное сверху подмножество множества БДД имеет точную верхнюю грань (в множестве БДД).

Задача 10. Докажите равномощность множества БДД и множества бесконечных цепочек из нулей и единиц.

Задача 11. Докажите равномощность множества бесконечных цепочек из нулей и единиц и множества всех подмножеств натуральных чисел.

Определение 4. Мощность множества действительных чисел называется **континуум**.

Задача 12. В чем некорректность предыдущего определения?

Задача 13. Докажите, что рациональные числа и только они представляются в виде периодических десятичных дробей.

Определение 5. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются **иррациональными**.

Задача 14. Существуют ли точные верхние грани у следующих множеств:

- a) $A = \{0, 0.3, 0.33, 0.333, \dots\}$; b) $A = \{0, 0.1, 0.12, 0.123, \dots\}$?

Если да, то рациональны ли они?

Определение 6. Отрезок $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid (a \leq x) \& (x \leq b)\}$. **Интервал** и **полуинтервал** определяются аналогично.

Задача 15. Докажите, не используя БДД, что **система вложенных отрезков** $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, где $I_n \supset I_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, содержит общую точку. То есть $\exists x : \forall n \in \mathbb{N} x \in I_n$.

Задача 16. Содержит ли общую точку **система вложенных интервалов**?

Задача 17. Докажите несчетность отрезка $[0, 1]$.

Задача 18. Докажите, не используя БДД, что в любом интервале содержится:

- a) рациональная точка; b) иррациональная точка.

Задача 19. Теория охоты.

a) Пусть x — иррациональное число. Докажите, что $\forall \varepsilon > 0 \exists q \in \mathbb{Q} : |x - q| < \varepsilon$.

b) На плоскости в точках с целыми координатами сидят одинаковые и одинаково расположенные зайцы. В начале координат залег охотник и стреляет. Докажите, что если угловой коэффициент прямой, по которой летит пуля, иррационален, то хоть один заяц будет убит, а если рационален, то можно подобрать размер зайцев так, чтоб пуля пролетела мимо зайца или между его лап.

¹Ну почти...