

НЕДЕТСКАЯ ЛОГИКА

— Без замков, без засовов дом, слиток золота спрятан в нем, - сказал он (Бильбо) просто так, чтобы оттянуть время, пока не придумает что-то поистине неразрешимое.
Дж.Р.Р. Толкиен, «Путешествие туда и обратно»

По умолчанию все функции в данном листочке из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, множества — подмножества натуральных чисел. Мы разрешаем *частичные* функции, то есть функции, определенные не на всем $\mathbb{N}$.

Задача 1. В понедельник учитель пообещал неожиданную контрольную по мат. анализу на этой неделе.

- а) Докажите, что контрольная не может быть в пятницу.
- б) Докажите, что контрольная не может быть в четверг (и во вторник тоже не может).
- с) Что за странность?

Указание. Прочитайте листок до конца.

Определение 1. Мы не будем давать строгого определения *алгоритма*. Скажем, что это последовательность действий, которую можно задать программой на компьютере. Такого понимания для этого листочка достаточно.

Определение 2. Назовем функцию f с натуральными аргументами и значениями *вычислимой*, если существует алгоритм A , ее вычисляющий. Другими словами: если $f(n)$ определено для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то алгоритм A останавливается на входе n и печатает $f(n)$; если же $f(n)$ не определено, то A не останавливается или просто ничего не печатает.

Задача 2. Являются ли следующие функции вычислимыми:

- а) $f(n) = n^2$;
- б) $f(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ — целая часть x);
- с) $f(n) = 1$, если в десятичной записи числа π есть по крайней мере n подряд идущих девяток, и $f(n) = 0$ в противном случае.

Задача 3. Бывают ли невычислимые функции?

Определение 3. Множество называют *разрешимым*, если существует алгоритм, позволяющий определить, принадлежит ли элемент множеству или не принадлежит.

Определение 4. *Характеристической* функцией множества назовем функцию, равную 1 на элементах множества и 0 в противном случае.¹

Упражнение. Множество разрешимо тогда и только тогда, когда его характеристическая функция вычислима.

Задача 4. Докажите, что множество всех рациональных чисел, меньших числа e , разрешимо.

Указание. Вам может помочь последовательность $a_n = (1 + 1/n)^{n+1}$.

Задача 5. Для строгости дальнейших рассуждений может пригодиться (а может и нет) следующий факт: любое непустое подмножество натуральных чисел содержит минимальных элемент. Докажите, что этот факт эквивалентен принципу математической индукции.

Задача 6. Докажите, что непустое подмножество натуральных чисел разрешимо тогда и только тогда, когда оно есть множество значений всюду определенной (на $\mathbb{N}$) неубывающей функции.

Задача 7. Докажите, что все разумные операции над разрешимыми множествами дают снова разрешимые множества, то есть класс разрешимых функций замкнут относительно этих операций.

Задача 8. Существуют ли неразрешимые множества?

¹Ну чем не *индикатор*?

Задача 9. Понятно, что натуральных чисел, описываемых не более, чем 13 словами конечно. Возьмем минимальное натуральное число, которое нельзя описать не более, чем за тринадцать слов. Мы только что описали неопределимое². В чем причина парадокса?

Определение 5. Назовем множество *перечислимым*, если существует алгоритм, печатающий все элементы этого множества.

Задача 10. Докажите, что класс перечислимых множеств замкнут относительно следующих операций:

- а) объединение множеств;
- б) пересечение множеств;
- с) декартово произведение множеств.

Задача 11. Докажите, что множество перечислимо тогда и только тогда, когда оно есть область определения вычислимой функции.

Задача 12. Докажите, что множество перечислимо тогда и только тогда, когда оно есть область значений вычислимой функции.

Задача 13. Докажите *теорему Поста*:

- а) Докажите, что все разрешимые множества перечислимы.
- б) Докажите, что если множество и его дополнение (до натуральных чисел) перечислимы, то оно является разрешимым.

Определение 6. *Проекцией* P некоторого множества Q пар натуральных чисел назовем множество первых компонент этих пар: $P = \{x \mid \exists y : (x, y) \in Q\}$.

Задача 14. Множество P перечислимо тогда и только тогда, когда оно является проекцией некоторого разрешимого множества пар Q .

Задача 15. *Теорема о графике.* Функция f вычислима тогда и только тогда, когда ее график является перечислимым множеством.

Задача 16. Покажите, что множество всех показателей n , для которых существует решение уравнения $x^n + y^n = z^n$ в целых положительных числах, перечислимо.

Рекомендуемая литература:

Н.К. Верецагин, А. Шень, «Вычислимые функции», МЦНМО, 2002.

²Сделать невозможное!