

Контрольная работа по листкам 1,2. Вариант 2

9 класс

11.10.02

Лишь только тот, кто витамины пьет, до самой смерти доживет.

Задача 1. Верно ли, что $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$?

Решение. Пусть $E = (C \cup D)$. Тогда $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cup B) \cap E = (A \cap E) \cup (B \cap E) = (A \cap (C \cup D)) \cup (B \cap (C \cup D)) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$. Здесь мы воспользовались задачей 11.1 из первого листочка, а также ассоциативностью и коммутативностью пересечения, которые следуют из определения: $A \cap B = \{x \mid x \text{ лежит в } A \text{ и } B\} = \{x \mid x \text{ лежит в } B \text{ и } A\} = B \cap A$; $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = \{x \mid x \text{ лежит сразу в } A, B \text{ и } C\}$.

Задача 2. $A = \{\emptyset\}, B = \emptyset, C = \{n \in \mathbb{N} \mid n : 3 \text{ и } n < 12\}, D = \{(a, b), (c, d)\}$. Выписать все элементы множества $(A \cup D) \times (B \cup C)$.

Решение.

$$C = \{3, 6, 9\}$$

$$A \cup D = \{\emptyset, (a, b), (c, d)\}$$

$$B \cup C = C$$

$$(A \cup D) \times (B \cup C) = \{(\emptyset, 3), (\emptyset, 6), (\emptyset, 9), ((a, b), 3), ((a, b), 6), ((a, b), 9), ((c, d), 3), ((c, d), 6), ((c, d), 9)\}$$

Задача 3. Пусть $A = \{0, 3, \emptyset, \{2, 5, \emptyset\}, (4, 7)\}$, а $B = \{3, 0, \text{Фунтик}, (7, 4), \{2, 5\}\}$. Исследуйте, где больше элементов: во множестве всех подмножеств $A \triangle B$ или во множестве $C = (A \cup B) \times (A \cap B)$.

Решение. Здесь и далее число элементов конечного множества M будем обозначать как $|M|$. Заметим, что $(a, b) = \{a, \{a, b\}\} \neq \{b, \{a, b\}\} = (b, a)$. Тогда

$$|A \cap B| = |\{0, 3\}| = 2,$$

$$|A \cup B| = |\{0, 3, \emptyset, \{2, 5, \emptyset\}, \{2, 5\}, (4, 7), (7, 4), \text{Фунтик}\}| = 8,$$

$$|A \triangle B| = |\{\emptyset, \{2, 5, \emptyset\}, \{2, 5\}, (4, 7), (7, 4), \text{Фунтик}\}| = 6,$$

$$|C| = 8 \cdot 2 = 16 < 2^6 \text{ — число подмножеств множества } A \triangle B \text{ из 6 элементов.}$$

Задача 4. $M = \{1, 2, 3, \dots, 100\}, N = \{1, \{2, \{3, \dots, \{100\} \dots\}\}$. У какого из этих множеств больше подмножеств?

Решение. Множество M состоит из 100 элементов, множество N — из 2. $2^{100} > 2^2$, поэтому подмножеств больше у M .

Задача 5. $M = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \dots, \{99, 100\}\}$. Сколько подмножеств у M ?

Решение. $|M| = 50$, поэтому у M 2^{50} подмножеств.

Задача 6. Доказать, что невозможно одновременное выполнение неравенств $a < b$ и $b < a$.

Решение. Пусть $a < b$. Покажем, что не возможно выполнение $b < a$. $a < b \Rightarrow a - b$ отрицательно по определению. Противоположный элемент к отрицательному положителен. $-(a - b) = (b - a)$, потому как $(b - a) + (a - b) = b - b + a - a = 0$ (здесь мы пользуемся ассоциативностью и коммутативностью сложения, определением вычитания и свойствами 0). Итак, $b - a$ положительно, а из $b < a$ следовало бы, что $b - a$ отрицательно. Значит, одновременное выполнение $a < b$ и $b < a$ невозможно.

Примечание. Кстати, можно (и нужно) доказать, что число не может быть одновременно положительным и отрицательным.

Задача 7. Докажите, что произведение отрицательного и положительного чисел отрицательно.

Решение. Пусть $a \in \mathbb{N}^-, b \in \mathbb{N}$. Тогда из определения целых чисел $-a \in \mathbb{N}$. $a = -(-a)$ из единственности противоположного элемента. $ab = (-(-a)) \cdot b = (-1) \cdot (-a) \cdot b = (-1) \cdot ((-a) \cdot b) = -((-a) \cdot b)$ по ассоциативности умножения, а также по задаче 3.3 листка 2. Противоположный к отрицательному положительный. $(-a) \in \mathbb{N}$. Произведение двух положительных чисел положительно. $(-a) \cdot b \in \mathbb{N}$. Противоположный к положительному отрицательный. $-((-a) \cdot b) = ab \in \mathbb{N}^-$.

Задача 8. Известно, что сумма нескольких натуральных чисел делится на 6. Доказать, что сумма кубов этих чисел также делится на 6.

Решение. Представим число n в виде $n = 6 \cdot q + r$, $0 \leq r \leq 6$. Возведем n в третью степень и найдем остаток от деления на 6. $n^3 = (6 \cdot q)^3 + 3 \cdot (6 \cdot q)^2 \cdot r + 3 \cdot (6 \cdot q) \cdot r^2 + r^3$. $(6 \cdot q)^3 + 3 \cdot (6 \cdot q)^2 \cdot r + 3 \cdot (6 \cdot q) \cdot r^2 : 6$, поэтому остаток будет равен остатку от деления r^3 на 6. Последовательно полагая $r = 0, 1, \dots, 5$, получаем, что от возведения числа в куб остаток от деления на 6 не меняется. Поэтому сумма кубов также будет кратна 6.

Задача 9. Доказать, что среди чисел, являющихся натуральными степенями двойки, найдутся два различных, разность которых делится на 91.

Решение. Если мы возьмем 92 степени двойки, то по принципу Дирихле среди этих 92 кроликов, рассаженных по 91 одной клетке (возможные остатки от деления на 91), найдется два, сидящих вместе. Их разность будет кратна 91.

Задача 10. Докажите, что из любых 52 целых чисел всегда можно выбрать два, сумма или разность которых делится на 100.

Решение. Разобьем все целые числа на группы. В первую группу отнесем те, чьи остатки от деления на 100 равны 1 или 99, во вторую – 2 или 98 и так далее. Еще две группы образуют числа, кратные 100, и числа, чьи остатки равны 50. Всего 51 группа (клетка). А у нас 52 числа (кролика). По принципу Дирихле найдутся два таких числа, что их остатки равны или в сумме дают сто. То есть разность или сумма этих чисел кратна 100, что и требовалось.

Задача 11. В классе 21 ученик. На контрольной преподаватель Вася сделал 10 ошибок, а остальные – меньше. Докажите, что по крайней мере трое сделали одинаковое число ошибок.

Решение. Каждый из 21 ученика сделал от 0 до 9 ошибок. Пусть n_i – число учеников, сделавших ровно i ошибок. Положим, что для всех $i = 0, 1, \dots, 9$ $n_i < 3$, то есть $n_i \leq 2$. Тогда посчитаем общее число учеников: $n = \sum_{i=0}^9 n_i \leq 10 \cdot 2 = 20 < 21$. Противоречие. Значит, есть число ошибок i , сделанное $n_i \geq 3$ учениками.