

Математический бой между 9В и 10В классами. 1 декабря 2002 года

- (1) 175 шалтаев стоят дороже, чем 125 болтаев, но дешевле, чем 126 болтаев. Докажите, что на трех шалтаев и одного болтая рубля не хватит. (Они стоят целое число копеек.)
- (2) На листе клетчатой бумаги отмечены пять точек, находящиеся в узлах клетчатой сетки. Докажите, что середина по крайней мере одного из отрезков, соединяющих отмеченные точки, тоже находится в узле сетки.
- (3) В марсианском метро 91 станция. От любой станции можно доехать до любой. Забастовочный комитет хочет закрыть n из них, где $0 < n < 91$. Забастовка считается гуманной, если между всеми незакрытыми станциями остается проезд. Докажите, что при любом n возможна гуманная забастовка.
- (4) Рассмотрим все натуральные числа, в записи которых участвуют лишь цифры 1 и 0. Разбейте эти числа на две группы так, чтобы сумма любых двух различных чисел из одной группы содержала в своей десятичной записи не менее двух единиц.
- (5) В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир. Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня. (Каждый обменивается не больше одного раза в день).
- (6) На плоскости живет ограниченная клякса. Каждая точка плоскости в следующую секунду становится черной, если в круге единичного радиуса, ее окружающем, площадь черной области больше площади белой области, в противном случае точка становится белой. Верно ли, что клякса рано или поздно исчезнет?
- (7) Существует ли семь различных натуральных чисел таких, что произведение любых шести из них плюс единица делится на седьмое число?
- (8) Три пешехода идут по прямым дорогам, каждый со своей постоянной скоростью. Докажите, что если они три раза оказались на одной прямой, то они все время будут на одной прямой.
- (9) В розыгрыше по футболу участвуют 20 команд. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже игравшие между собой?
- (10) На пир собрались 100 людоедов. Известно, что среди любых 10 хотя бы один оказался в желудке у другого (из этой десятки). Докажите, что есть "матрешка" из 12 людоедов, каждый из которых (кроме последнего) находится в желудке у следующего.
- (11) За круглым столом сидят 7 гномов. Перед каждым из них стоит кружка. В некоторых кружках налито молоко. Один из гномов разливает все свое молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое и т.д. После семи разливаний в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько в ней было вначале. Во всех кружках вместе молока 3 литра. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?
- (12) У 3 алкоголиков есть бесконечно большие стаканы. В каждом из них натуральное число литров. Один может переливать другому столько, сколько у того уже есть. Всегда ли они могут перелить всю жидкость в 2 стакана?

- (13) По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 9 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день КАКИЕ-ТО два пианиста, живущие в соседних комнатах, K -ой и $(K + 1)$ -ой, приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(K - 1)$ -ую и $(K + 2)$ -ую комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся (пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают).
- (14) Доказать, что в каком бы порядке ни расположить числа от 1 до 101, всегда из этих чисел можно выбрать одиннадцать, не обязательно последовательных, которые следуют одно за другим в порядке возрастания или убывания.
- (15) Найти наибольший возможный радиус окружности, не пересекающей ни одного белого поля на шахматной доске с обычной раскраской размером 8×8 .
- (16) На плоскости нарисовано 6 кругов (необязательно равных). Центр каждого круга не принадлежит больше никакому другому кругу. Может ли у этих кругов найтись общая точка?
- (17) Десятиметровый коридор полностью покрыт некоторым числом ковров. Можно ли выбрать среди них несколько так, чтобы ни один из них не налегал на другой, и чтобы из них можно было сшить пятиметровую дорожку.

- (Конкурс капитанов 1) Найти все десятизначные числа такие, что первая цифра равно числу нулей в его десятичной записи, вторая — числу единиц и так далее вплоть до десятой, равной числу девяток в записи числа.
- (Конкурс капитанов 2) Установлено, что погода на Сириусе в данный день полностью определена предыдущей неделей. Варианты погоды: магнитная буря, метеоритный дождь, штиль. Последнюю неделю шел метеоритный дождь. Докажите, что "дождливые" недели всегда были и будут.
- (Конкурс капитанов 2) Есть два больших сосуда. В одном — 1 литр спирта, а другом — 1 литр воды. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой. Можно ли за несколько переливаний сделать 60-процентный раствор спирта в том сосуде, где была вода.
- (Конкурс капитанов 3) Докажите, что в числе $(6 + \sqrt{37})^{999}$ первые 999 знаков справа после запятой — нули.
- (Конкурс капитанов 3) Докажите, что число $(1000!)/(100!)^{10}$ — целое.