

МНОЖЕСТВО ДЖАББЕРВОКА

Идет четверг. Я верю в пустоту.

В ней как в Аду, но более херово.

И новый Дант склоняется к листу

И на пустое место ставит слово.

И. Бродский «Похороны Бобо»

В этом листке буквой p обозначены простые числа. Все числа в листке — натуральные (если не сказано иное).

Определение 1. Множеством Джаббервока Ψ назовем множество таких натуральных чисел n , что между n и $2n$ нет простых чисел. То есть, $\Psi = \{n \in \mathbb{N} \mid \neg \exists p : n \leq p \leq 2n\}$.
Элементы множества Джаббервока назовем *числами Джаббервока*.

Определение 2. $\Psi = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1 \ \& \ \neg \exists p : n \leq p < 2n\}$.

Задача 1. Докажите эквивалентность определений.

Множество Джаббервока имеет широкое применение в теории чисел, криптографии и фрактальном анализе. Изучим его свойства подробнее.

Задача 2. Докажите, что почти все элементы множества Джаббервока — четные числа.

Определение 3. *Совершенным числом* называется число, равное сумме своих делителей (исключая само число). Например, числа 6 и 28 совершенны.

Задача 3. Докажите, что совершенные числа не являются элементами множества Джаббервока.

Определение 4. *Метрикой* на множестве M называется действительная функция ρ на множестве пар элементов M , что $\forall x, y, z \in M$ выполнено:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Пару (M, ρ) называют *метрическим пространством*. Часто вместо пары пишут просто M .

Задача 4. Введите метрику на натуральных числах.

Определение 5. *Ограничением* функции f на множество $M \subset D_f$ называется функция $f|_M$, определенная на M и совпадающая на нем с f .

Определение 6. *Индукцированная метрика* на M — это ограничение на M метрики некоторого надмножества M .

Задача 5. Индуцируйте метрику с $\mathbb{N}$ на Ψ .

Определение 7. Назовем два метрических пространства (A, ρ_1) и (B, ρ_2) *изоморфными*, если существует взаимно однозначное соответствие ϕ между A и B , сохраняющее метрику. То есть

$$\forall x, y \in A \quad \rho_1(x, y) = \rho_2(\phi(x), \phi(y)).$$

Отображение ϕ называется *изоморфизмом*.

Задача 6. Докажите, что это тоже самое, что

$$\forall x, y \in B \quad \rho_2(x, y) = \rho_1(\phi^{-1}(x), \phi^{-1}(y)).$$

Задача 7. Докажите, что все метрики на множестве Джаббервока изоморфны.

Задача 8. Пронумеруем элементы χ множества Джаббервока в порядке возрастания. Докажите оценку¹:

$$\forall \chi_k, \chi_{k+1} \in \Psi \quad \chi_{k+1} \geq \frac{\chi_k!}{k!}.$$

¹Оценка впервые получена Д.А. Григоренко.

Определение 8. Подмножество натуральных чисел называется *перечислимым*, если существует алгоритм, печатающий все элементы этого множества (и только их).

Задача 9. Исследуйте множество Джаббервока на перечислимость.

Определение 9. Подмножество натуральных чисел называется *разрешимым*, если существует алгоритм, определяющий, является ли число элементом множества или нет.

Задача 10. Докажите, что множество Джаббервока разрешимо.

Задача 11. Докажите², что для любого $n \in \Psi$ найдутся целые x, y, z такие, что $x^n + y^n = z^{n-1}$.

Задача 12. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами степени не ниже третьей и один его корень — число Джаббервока. Тогда найдется еще одно число Джаббервока, являющееся корнем данного многочлена.³

Задача 13.* Докажите, что все четные числа Джаббервока представимы в виде суммы двух простых.

Фамилия: _____

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Рекомендуемая литература:

[1] А.И. Галочкин, Ю.В. Нестеренко, А.Б. Шидловский, «Введение в теорию чисел», МГУ, 1995.

[2] С.О. Шатуновский, «Введение в анализ», Mathesis, 1923.

[3] И.А. Вайсман, «Дифференциальные операторы на пространстве Лобачевского и многообразии его орисфер», МГУ, 2004.

[4] L. Carroll, Complete, Penguin, 1982.

²Результат получен М.Д. Арнольдом.

³Результат получен Д.А. Григоренко и М.Д. Арнольдом независимо и одновременно.