

Листок №3. Расширенные множества действительных чисел. Окрестности

10 класс

Дата выдачи листа: 22.09.03.

«...для промежуточных величин имеется тип данных промежуточное действительное, расширенный диапазон и точность которого в сложных вычислениях сводят к минимуму ошибки округления, переполнения и исчезновения порядка.»

«Введение в микропроцессор 80386»

Иногда удобно пользоваться одним из расширенных множеств действительных чисел.

Определение 1. $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, где $\forall x \in \mathbb{R} (-\infty < x) \& (x < +\infty)$; $\hat{\mathbb{R}} = \bar{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$.

Операции сложения и умножения для ∞ и $\pm\infty$ не определены. Операции сравнения для ∞ также не определены.

Напомним определение интервала: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid (a < x) \& (x < b)\}$, где $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$.

Определение 2. Для любого $x \in \hat{\mathbb{R}}$ определим понятие ε -окрестности $U_\varepsilon(x)$, где ε — любое положительное число: если $x \in \mathbb{R}$, $U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$; $U_\varepsilon(+\infty) = \{x \mid x > 1/\varepsilon\}$; $U_\varepsilon(-\infty) = \{x \mid x < -1/\varepsilon\}$; $U_\varepsilon(\infty) = \{x \mid |x| > 1/\varepsilon\}$.

Обобщим понятия граней на множество $\bar{\mathbb{R}}$.

Определение 3. $c \in \bar{\mathbb{R}}$ называется **верхней гранью** множества $M \subset \mathbb{R}$, если $\forall x \in M \ x \leq c$.

Определение 4. $c \in \bar{\mathbb{R}}$ называется **точной верхней гранью (Supremum)** множества $M \subset \mathbb{R}$, если c — верхняя грань и любое $c' < c$ верхней гранью не является. Обозначение: $c = \sup M$.

Аналогично определяются нижняя грань и точная нижняя грань ($\inf M$).

Задача 1. Докажите: $c = \sup M \Leftrightarrow (\forall x \in M \ x \leq c) \& (\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in M \cap U_\varepsilon(c))$.

Задача 2. Докажите, что для всякого непустого числового множества точная верхняя грань в $\bar{\mathbb{R}}$ существует и единственна.

Задача 3. Найдите $\sup$ и $\inf$ множеств:

a) $(0, 1)$;

b) $[0, 1]$;

c) $\mathbb{N}$;

d) $\mathbb{Q}$;

e) $\mathbb{R}$.

Сформулируем определение предела последовательности с использованием термина окрестности.

Последовательности, как и раньше, считаются числовыми, т.е. ∞ и $\pm\infty$ не могут являться значениями элементов последовательностей.

Определение 5. Число $a \in \hat{\mathbb{R}}$ называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \ a_n \in U_\varepsilon(a)$.

Задача 4. Может ли расходящаяся последовательность иметь предел? Может ли сходящаяся последовательность не иметь предела? Может ли имеющая предел последовательность быть расходящейся?

Задача 5. Может ли последовательность иметь более одного предела в $\hat{\mathbb{R}}$? в $\bar{\mathbb{R}}$?

Обобщим понятия предельной точки и частичного предела.

Определение 6. $a \in \hat{\mathbb{R}}$ называется **предельной точкой** последовательности, если $\forall \varepsilon > 0$ в $U_\varepsilon(a)$ лежат значения бесконечного числа элементов этой последовательности.

Определение 7. $a \in \hat{\mathbb{R}}$ называется **частичным пределом** последовательности, если оно является пределом какой-либо ее подпоследовательности.

Задача 6. Докажите, что частичный предел и предельная точка — одно и то же.

Далее все пределы и предельные точки принадлежат $\bar{\mathbb{R}}$.

Определение 8. Наибольший и наименьший элемент множества предельных точек последовательности (если такие элементы существуют) называются **верхним пределом** и **нижним пределом** соответственно.

Обозначения: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Задача 7. Докажите:

a) Последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она имеет единственную предельную точку;

b) Последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда ее верхний и нижний предел существуют и равны.

Задача 8. (Обобщенная теорема Больцано-Вейерштрасса) Докажите:

a) любая последовательность имеет хотя бы одну предельную точку;

b) для любой последовательности в множестве всех ее предельных точек есть наибольший и наименьший элемент;

c) любая последовательность имеет верхний и нижний предел.

Задача 9. Введите операции сложения и умножения для ∞ и $\pm\infty$ так, чтобы выполнялись арифметические свойства пределов ($a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$): $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$; $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = a/b$ ($b \neq 0, \forall n \in \mathbb{N} b_n \neq 0$).